Mitschriebe zur Analysis 1

Raphael Michel

Stand: 31.01.2014

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Mengen

Siehe meine Mitschrift zu Lineare Algebra 1.

1.2 Funktionen

Definition 1.1. Seien M, N zwei Mengen. Eine Funktion $f : M \to N$ ist eine Abbildung, die jedem Element $x \in M$ genau ein Element $y \in M$ zuordnet, d.h. $y = f(x)$.

Die Menge M heißt Definitionsbereich von f.
Die Menge $R(f) \equiv f(m) := \{y \in N : \exists x \in M \quad \text{mit} \quad f(x) = y\}$ heißt Bildmenge („Range") von f.
Der Graph von f ist definiert als die Menge

$$G(f) := \{(x, y) \in M \times N : y = f(x)\} \subset M \times N$$

- Eine Funktion $f : M \to N$ heißt **surjektiv**, falls $R(f) = N$.
- Eine Funktion $f : M \to N$ heißt **injektiv**, falls aus $f(x) = f(y)$ folgt, dass $x = y$
- Eine Funktion $f : M \to N$ heißt **bijektiv**, falls sie injektiv und surjektiv ist

Definition 1.2. Sei $f : M \to N$ bijektiv, d.h. zu jedem $y \in N$ existiert genau ein $x \in M$ mit $f(x) = y$. Wir definieren die **inverse Abbildung** $f^{-1} : N \to M$ durch:

$$x = f^{-1}(y)$$

Bemerkung 1.3. Es gilt:

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in N$$
$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in M$$

Beispiel 1.4.

1. Sei M eine Menge. Die Funktion $\mathrm{id} : M \to M, \mathrm{id}(x) = x$ heißt identische Abbildung.
2. Sei M eine Menge. Eine Funktion $f : \mathbb{N} \to M$ heißt **Folge**, wobei $\mathbb{N}$ die natürlichen Zahlen sind.

3. Sei X eine Menge und $E \subset X$. Die Funktion $\chi_E : X \to \mathbb{R}$ mit

$$\chi_E(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in E \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

heißt charakteristische Funktion von E (auch: Indikatorfunktion)

Definition 1.5. Seien M, N, O Mengen und seien $f : M \to N, g : N \to O$. Dann ist die Verknüpfung $g \circ f$ von f und g definiert durch

$$g \circ f(x) := g(f(x)), \quad g \circ f : M \to O$$

1.3 Relationen

Definition 1.6. Sei M eine Menge. Eine Relation $\mathfrak{R}$ ist eine Teilmenge von $M \times M$. Wir schreiben

$$x \sim_{\mathfrak{R}} \quad \text{falls } (x, y) \in \mathfrak{R}$$

Beispiel: Jede Funktion $f : X \to X$ erzeugt eine Relation durch $\sim_{\mathfrak{G}(f)}$.

Definition 1.7. Sei M eine Menge und $\mathfrak{R} \subset M \times M$ eine Relation. Dann heißt $\mathfrak{R}$ Äquivalenzrelation, falls

1. $x \sim_{\mathfrak{R}} x \quad \forall x \in M$ (Reflexivität)
2. $x \sim_{\mathfrak{R}} y \iff y \sim_{\mathfrak{R}} x$ (Symmetrie)
3. $x \sim_{\mathfrak{R}} y, \quad y \sim_{\mathfrak{R}} z \implies x \sim_{\mathfrak{R}} z$ (Transitivität)

Beispiel 1.8. Sei $f : M \to N$ eine Funktion. Wir sagen $x \sim y$ genau dann, wenn $f(x) = f(y)$ für alle $x, y \in M$. Dies definiert eine Äquivalenzrelation.

Definition 1.9. Sei $\mathfrak{R} \subset M \times M$ eine Äqzuivalenzrelation. Zu $x \in M$ definieren wir die **Äquivalenzklasse**

$$[x] = \{m \in M | x \sim_{\mathfrak{R}} m\}$$

Die **Quotientenmenge** $M/\sim$ ist die Menge aller Äquivalenzklassen, d.h.:

$$M/\sim = \{[m] : m \in M\}$$

Definition 1.10. Eine Relation $\Re \subset M \times M$ heißt **Ordnungsrelation**, falls $\forall x, y, z \in M$:

1. $x \sim_{\Re} x$ (Relfexivität)
2. $x \sim_{\Re} y, \quad y \sim_{\Re} z \implies x \sim_{\Re} z$ (Transitivität)
3. $x \sim_{\Re} y, y \sim_{\Re} x \implies x = y$ (Antisymmetrie)

Für Ordnungsrelationen schreiben wir $x \leqslant y$ oder auch $x \preceq y$.
Eine Menge mit einer Ordnungsrelation heißt **geordnete Menge**. Falls $x \leqslant y$ oder $y \leqslant x \forall x, y \in M$, dann heißt M **totalgeordnet**.

2 Zahlenmengen und Räume

2.1 Axiome der reellen Zahlen

Axiom 2.1. *Es gibt eine Menge $\mathbb{R}$, welche die folgenden Eigenschaften besitzt:*

1. *$\mathbb{R}$ ist ein Körper (Def. folgt)*
2. *$\mathbb{R}$ ist geordnet (Def. folgt)*
3. *$\mathbb{R}$ ist ordnungsvollständig (Def. folgt)*

Definition 2.2. Eine Menge $\mathbb{K}$ heißt Körper, falls es zwei Operationen $+\colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ und $\cdot\colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ gibt, sodass für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt:

1. Assoziativität: $(a + b) + c = a + (b + c)$
2. Kommutativität: $a + b = b + a$
3. Existenz der Null (neutrales Element der Addition): $\exists 0 \in \mathbb{K}\colon\ a + 0 = a \quad \forall a \in \mathbb{K}$
4. Zu jedem $a \in \mathbb{K}$ existiert ein additiv inverses Element, genannt $-a$, sodass $a + (-a)$.
5. $(ab)c = a(bc)$
6. $ab = ba$
7. $\exists 1 \in \mathbb{K}\colon \quad 1 \neq 0, a \cdot 1 \quad \forall a \in K$
8. zu jedem $a \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ gibt es ein multiplikativ inverses Element, genannt a^{-1}, sodass $aa^{-1} = 1$.
9. $a(b + c) = ab + ac$

Wir definieren die Notationen:

$$a - b = a + (-b) \quad \text{und} \quad \frac{a}{b} = ab^{-1} \text{ für } b \neq 0$$

Es lässt sich zeigen, dass:

$$-(-a) = a \tag{1}$$
$$(-a) + (-b) = -(a+b) \tag{2}$$
$$(a^{-1})^{-1} = a \tag{3}$$
$$a^{-1}b^{-1} = (ab)^{-1} \quad \text{für } a, b \neq 0 \tag{4}$$
$$a \cdot 0 = 0 \quad \forall a \in \mathbb{K} \tag{5}$$
$$a(-b) = -(ab) \tag{6}$$
$$(-a)(-b) = ab \tag{7}$$
$$a(b-c) = ab - ac \tag{8}$$
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \tag{9}$$
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \tag{10}$$

Definition 2.3. Die reellen Zahlen sind geordnet in folgendem Sinne: Es gibt eine Menge $P \subseteq \mathbb{R}$, genannt die **positiven Zahlen**, sodass:

1. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist genau eine der folgenden Aussagen wahr:

$$x \in P, \quad x = 0, \quad -x \in P$$

2. Aus $x, y \in P$ folgt $x + y \in P, xy \in P$.

Wir definieren:

$$x > y :\iff x - y \in P \tag{11}$$
$$x \geqslant y :\iff x > y \vee x = y \tag{12}$$
$$x < y :\iff y > x \tag{13}$$
$$x \leqslant y :\iff x < y \vee x = y \tag{14}$$

Aus den Ordnungsrelationen sieht man leicht:

$$a < b, b < c \implies a < c \tag{15}$$
$$a < b \implies a + c < b + c \quad \forall c \in \mathbb{R} \tag{16}$$
$$a < b \implies ac < bc \quad \forall c > 0 \tag{17}$$

Aus $a \neq 0$ folgt $a^2 > 0$. Insbesonder gilt $1 = 1^2 > 0$.

Wir definieren:

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{sonst} \end{cases} \tag{18}$$

Weiterhin setzen wir:

$$x_+ = \max\{x, 0\} = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{19}$$

$$x_- = \max\{-x, 0\} \tag{20}$$

Insbesondere gilt:

$$x = x_+ - x_-, \quad |x| = x_+ + x_- \tag{21}$$

Definition 2.4. Für $a, b \in \mathbb{R}$ definieren wir:

$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\} \tag{22}$$
$$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \tag{23}$$
$$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\} \tag{24}$$
$$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\} \tag{25}$$
$$(a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\} \tag{26}$$
$$(-\infty,b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \tag{27}$$
$$[a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\} \tag{28}$$
$$(-\infty,b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant b\} \tag{29}$$
$$(-\infty,\infty) := \mathbb{R} \tag{30}$$

Definition 2.5. Sei $M \subset \mathbb{R}$.

1. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt **obere Schranke** von M, falls $m \leqslant a \forall m \in M$. Eine Menge M heißt nach oben beschränkt, falls sie eine obere Schranke besitzt.

2. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt **Supremum** von M, falls sie obere Schranke von M ist und $a \leqslant b \quad \forall$ obere Schranken b von M. Notation: $a = \sup M$. Es kann höchstens eine Supreme geben.

3. Falls $a = \sup M$ und $a \in M$, dann heißt a **Maximum** von M.

4. Entsprechend sind die Begriffe **untere Schranke**, **Infimum** und **Minimum** definiert.

5. Eine Menge heißt beschränkt, wenn sie eine obere und eine untere Schranke besitzt.

Definition 2.6. $\mathbb{R}$ ist ordnungsfollständig bedeutet das folgende: Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum.

2.2 Vollständige Induktion, die Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$

Definition 2.7. Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt induktiv, falls

1. $0 \in M$
2. $m \in M \implies m + 1 \in M$

Insbesondere ist $\mathbb{R}$ induktiv.

Definition 2.8. Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ sind definiert durch:

$$\mathbb{N} = \bigcap \{A : A \subset \mathbb{R} \text{ ist induktiv}\} \tag{31}$$

Weiterhin benennen wir $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \backslash \{0\}$

Lemma 2.9. $\mathbb{N}$ *ist induktiv.*

Beweis. Seien $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$ die induktiven Teilmengen von $\mathbb{R}$, wobei Λ eine Indexmenge ist, d.h.

$$\mathbb{N} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \tag{32}$$

Dann gilt $0 \in A \quad \forall \lambda \in \Lambda$ und damit $0 \in \mathbb{N}$. Sei $n \in \mathbb{N}$, d.h. $n \in A_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda$.
$\implies n + 1 \in A_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda \implies n + 1 \in \mathbb{N} \implies \mathbb{N}$ ist induktiv. □

Satz 2.10. *Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x < n$.*

Beweis. Wir argumentieren mit einem indirekten Beweis. Wir nehmen also an, dass $\mathbb{N}$ beschränkt ist. Nach dem Vollständigkeitsaxiom existiert $s := \sup \mathbb{N}$. Damit ist $s - 1$ keine obere Schranke.
Also gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > s - 1$. Da $\mathbb{N}$ induktiv ist, folgt $n + 1 \in \mathbb{N}$. Damit folgt $n + 1 > s \in \mathbb{N}$, womit s kein Supremum mehr ist. $\lightning$
Daher ist $\mathbb{N}$ unbeschränkt. □

Satz 2.11 (Prinzip der vollständigen Induktion)**.** *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine Aussage. Weiterhin gelte*

1. *$A(0)$ ist wahr*
2. *$A(n)$ wahr $\implies$ $A(n+1)$ wahr*

Dann ist $A(n)$ wahr $\forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Die Menge $M := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist wahr}\} \subset \mathbb{N}$.
Aus 1. und 2. folgt, dass M induktiv ist. Aus der Definition von $\mathbb{N}$ folgt, dass $\mathbb{N} \subset M$.
$\implies M = \mathbb{N}$ □

Lemma 2.12. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

1. *$n \geqslant 0$*
2. *$n = 0$ oder $n - 1 \in \mathbb{N}$*
3. *$m + n, mn \in \mathbb{N}$. Falls $m \geqslant n$ sogar $m - n \in \mathbb{N}$.*
4. *$\forall m \in \mathbb{N}$ gilt $(n-1; n) \cap \mathbb{N} = \varnothing$*

Beweis.

1. Sei $A(n)$ die Aussage, dass $n \geqslant 0$ ist.

   Induktionsanfang: Da $0 \geqslant 0, A(0)$ wahr.

   Induktionsschritt: Es gelte $A(n)$.

   $\implies n \geqslant 0 \implies n + 1 \geqslant 0 \implies A(n+1)$ gilt. $\implies A(n) \forall n \in \mathbb{N}$

2. Sei $A(n)$ die Aussage 2. Dann gilt $A(0)$. Falls $A(n)$ gilt, dann gilt auch $A(n+1)$

3. Zu festem $m \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ die Aussage, das $m + n \in \mathbb{N}$ ist. Dann gilt noch die Voraussetzung $A(0)$, da $m \in \mathbb{N}$. Es gelte nun $A(n)$, d.h. $m + n \in \mathbb{N}$. Da $\mathbb{N}$ induktiv ist $\implies m + n + 1 = m + (n+1) \in \mathbb{N}$, d.h. $A(n+1)$ gilt.

4. Induktionsanfang: $A(0)$ ist wahr.

   Induktionsschritt: $A(n) = A(n+1)$. Angenommen, $A(n+1)$ gelte nicht, dann:

   $$\exists m \in \mathbb{N} \cap (n, n+1)$$

   Aus 1. folgt, dass $m > n \geqslant 0$, d.h. $m > 0$. Aus 2. folgt $m - 1 \in \mathbb{N} \cap (n-1, n)$, d.h. $A(n)$ gilt nicht. $\lightning$.

   Damit gilt $A(n) \implies A(n+1)$.

□

Lemma 2.13. *Jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ besitzt ein Minimum.*

Beweis. Sei $M \subset \mathbb{N}$ eine Menge, die kein Minimum hat. Es reicht zu zeigen, dass $M \neq \emptyset$. Insbesondere gilt $0 \notin M$, da sonst $0 = \min M$. Sei E die Menge

$$E = \{n \in \mathbb{N} : n < m \forall m \in M\}$$

Es reicht zu zeigen, dass $E = N$.
In der Tat, aus dem Satz von Archimedes folgt dann $M \neq \emptyset$.
Um $E = \mathbb{N}$ zu zeigen, benutzen wir ein Induktionsargument, wobei $A(n)$ die Aussage $n \in E$ ist. Nach vorherigem Lemma und da $0 \notin M$, gilt $0 < m \forall m \in M$,, d.h. $0 \in E$.
Induktionsschritt: Sei $n \in E$ aber $n + 1 \notin E$. Dann gibt es ein $m \in M$ mit $m \leqslant n + 1$. Da M kein Minimum hat $\exists p \in M$ mit $p < m$. Daher $p < m + 1$. Da $p \in M, n \in E$ folgt $n < p$, d.h. $p \in (n, n + 1) \cap \mathbb{N}$. Dies ist ein Widerspruch zum vorherigen Lemma.
Daher gilt $E = \mathbb{N}$ und $M \neq \emptyset$. □

Definition 2.14. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und seien $a_k \in \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}, m \leqslant k \leqslant n$. Wir definieren induktiv

1. $\sum_{k=m}^{m} a_k := a_m$
2. $\sum_{k=m}^{n+1} a_k := a_{n+1} + \sum_{k=m}^{n} a_k$ für $n \geqslant m$

und außerdem $\sum_{k=m}^{n} = 0$ falls $n < m$. Notation:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

Analog definieren wir

1. $\prod_{k=m}^{m} a_k := a_m$
2. $\prod_{k=m}^{n+1} a_k := a_{n+1} \cdot \sum_{k=m}^{n} a_k$ für $n \geqslant m$

und außerdem $\prod_{k=m}^{n} = 1$ falls $n < m$. Notation:

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \cdots \cdot a_n$$

Satz 2.15. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Beweis. Mit vollständiger Induktion. Die Formel entspricht der Behauptung $A(n)$. Sicherlich gilt $A(0)$. Es gelte $A(n)$. Dann folgt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = n+1+\sum_{k=1}^{n} k = n+1+\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}(2+n) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \tag{33}$$

woraus folgt, dass $A(n+1)$ gilt. □

Definition 2.16. Sei $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Wir definieren die n-te Potenz x^n von x durch:

1. $x^0 := 1$
2. $x^{n+1} := x \cdot x^n$

Insbesondere gilt: $0^0 = 1$.

Lemma 2.17 (Bernoullische Ungleichung)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}, a \geqslant -1$. Dann gilt $(1+a)^n \geqslant 1+na$.*

Beweis. (Induktion über $n \in \mathbb{N}$) Sicherlich gilt das Lemma für $n = 0$. Nun gelte es für $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} (1+a)^{n+1} &= (1+a) \cdot (1+a)^n && (34)\\ &\geqslant (a+a)(1+na) && (35)\\ &\geqslant 1+a(n+1)+a^2 n && (36)\\ &\geqslant 1+a(n+1) && (37) \end{aligned}$$

□

Lemma 2.18. *Sei $x \in \mathbb{R}, x \neq 1, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \tag{38}$$

Beweis.

$$(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=1}^{n+1} x^k = 1 - x^{n+1} \tag{39}$$

□

Definition 2.19. Wir definieren die **Fakultät** $n!$ für $n \in \mathbb{N}$ durch

1. $0! := 1$
2. $n! := (n-1)!n$

bzw. $n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$. Für $k, n \in \mathbb{N}, k \leqslant n$ definieren wir den Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{40}$$

Es gilt:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \tag{41}$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \tag{42}$$

Denn:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k!)(n+1-k)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!(k+n+1-k)}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \tag{43}$$

Satz 2.20 (Binomischer Satz)**.** *Seien $x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, dann gilt:*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \tag{44}$$

Beweis. Die Aussage gelte für $n = 0$.

Die Aussage gelte für $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} && (45)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k} && (46)\\
&= \sum_{k=1}^{+1}\binom{n}{k-1}x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k} && (47)\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k y^{n+1-k} && (48)
\end{aligned}$$

□

2.3 Interallschachtelungen, Wurzeln, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$

Definition 2.21. Die **ganzen Zahlen** $\mathbb{Z}$ sind definiert durch

$$\mathbb{Z} = \{z : z \in \mathbb{N} \vee -z \in \mathbb{N}\} \tag{49}$$

Die **rationalen Zahlen** $\mathbb{Q}$ sind definiert durch

$$\mathbb{Q} = \{q : q = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*\} \tag{50}$$

Satz 2.22. *$\mathbb{Q}$ ist ein Körper.*

Beweis. Siehe Übungsaufgaben. □

Lemma 2.23. *Jede nach oben beschränkte Menge $M \in \mathbb{Z}$ hat ein Maximum, je nach unten beschränkte Menge $M \in \mathbb{Z}$ hat ein Minimum.*

Beweis. Zur Übung. (Benutze den Wohlordnungssatz für $\mathbb{N}$.) □

Definition 2.24. Zu $r \in \mathbb{R}$ definieren wir den Abrundungsoperator $\lfloor\cdot\rfloor$ und den Aufrundungsoperator $\lceil\cdot\rceil$ durch

$$\lfloor r \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leqslant r\} \tag{51}$$
$$\lceil r \rceil := \min\{z \in \mathbb{Z} : z \geqslant r\} \tag{52}$$

Insbesondere gilt $\lfloor r \rfloor \in (r-1, r]$ und $\lceil r \rceil \in [r, r+1)$.

Lemma 2.25. *Zu jedem $r \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$ existiert ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $|q - r| < \epsilon$.*

Beweis. Nach dem Satz von Archimedes gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}^*$ mit $n > \frac{1}{\epsilon}$. Sei $m = \lfloor nr \rfloor \in \mathbb{Z}$ und sei $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
& nr - 1 < m \leqslant nr && (53)\\
\implies & r - \frac{1}{n} < q \leqslant r && (54)\\
\implies & r - \epsilon < q \leqslant r && (55)\\
\implies & q \in (r - \epsilon, r] && (56)
\end{aligned}
$$

□

Satz 2.26. *Es gibt kein $q \in \mathbb{Q}$ mit $q^2 = 2$.*

Beweis. Die geraden Zahlen sind die Menge $\{z = 2w : w \in \mathbb{Z}\}$, die ungeraden sidn die Menge $\{z = 2w + 1 : w \in Z\}$. Man sieht leicht, dass jede Zahl entweder ungerade oder gerade, aber nicht beides ist. Außerdem gilt:

$$
\begin{aligned}
z \text{ gerade} &\iff z^2 \text{ gerade} && (57)\\
z \text{ ungerade} &\iff z^2 \text{ ungerade} && (58)
\end{aligned}
$$

Angenommen, es gäbe ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $q^2 = 2$. Da $q \in \mathbb{Q}$ ist die Menge

$$M := \{n \in \mathbb{N}^* : qn \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{N}^* \neq \emptyset \tag{59}$$

Nach dem Wohlordnungssatz existiert $n := \min M$, d.h. $q = \frac{m}{n}$ für $m = qn$. Aus $q^2 = 2$ folgt $m^2 = 2n^2$. Insbesondere ist m^2 und damit auch m gerade, d.h. $m = 2p$ für ein $p \in \mathbb{Z}$ $\implies 4p^2 = 2n^2 \implies n^2 = 2p^2$. Damit sind n^2 und auch n gerade. $\implies \exists l \in \mathbb{N}^*$ mit $n = 2l$. Daher gilt $q = \frac{p}{n}, lq \in \mathbb{Z}, l < n$. Dies ist ein Widerspruch zur Minimalität von n. □

Definition 2.27. Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Sei $I \in \{(a,b), [a,b), (a,b], [a,b]\}$. Dann ist die Länge des Intervalls I gegeben durch

$$|I| := |b - a| \tag{60}$$

Definition 2.28. Eine **Intervallschachtelung** $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge von Intervallen $I_n = [a_n, b_n]$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}, a_n < b_n$, sodass

1. $I_{n+1} \subset I_n \forall n \in \mathbb{N}$
2. Es gilt $|I_n| \to 0$ für $n \to \infty$ in folgendem Sinne: Für alle $\epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|I_n| < \epsilon \quad \forall n \geqslant n_0$.

Satz 2.29. *Zu jeder Intervallschachtelung* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\exists! x \in \mathbb{R}$ *mit*

$$x = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

Beweis. Wir definieren $A := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}, B := \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$, wobei a_n und b_n die zusammenlaufenden Grenzen der Intervallschachtelung sind. Die Mengen A, B sind beschränkt, da $a_0 \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Sei $m = \sup A, M = \inf B$.
Insbesondere ist m untere Schranke von B und M obere Schranke von A. Daher gilt $m \leqslant M$.
Offensichtlich gilt

$$[m, M] = \bigcap_{m\in M} I_n$$

Zu zeigen bleibt, dass $M = n$. Nach Voraussetzung gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$|I_n| = b_n - a_n < \epsilon \quad \forall n > n_0 \tag{61}$$

Daher gilt:

$$0 \leqslant M - m \leqslant b_n - a_n \tag{62}$$
$$\implies M - m \leqslant \epsilon \tag{63}$$
$$\implies M \leqslant m \tag{64}$$

Aus $M \leqslant m$ und $m \leqslant M$ folgt $m = M$. □

Satz 2.30. *Sei* $y \in (0, \infty), k \in \mathbb{N}^*$. *Dann existiert* genau ein $x \in (0, \infty)$ *mit* $x^k = y$.

Beweis. **Eindeutigkeit** $\forall k \in \mathbb{N}^*, a, b, c \in (0, \infty)$ gilt:

$$a < b \implies a^k < b^k \tag{65}$$

Dies folgt mit vollständiger Induktion. Aus Gleichung (65) folgt Eindeutigkeit.

Existenz Wir konstruieren eine Intervallschachtelung $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}, I_n = [a_n, b_n]$ wie folgt:

Wir definieren $a_0 := 0, b_0 := 1 + y$. Nach vorherigem Lemma gilt:

$$a_0^k = 0 < y < 1 + ky \leqslant (1 + y)^k = b_o^k \tag{66}$$

und daher $a_0^k < y < b_0^k$.

Wir definieren

$$c_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n + b_n) \quad \text{und induktiv:} \tag{67}$$

$$a_{n+1} := \begin{cases} a_n & \text{falls } y \leqslant c_{n+1}^k \\ c_{n+1} & \text{sonst} \end{cases} \tag{68}$$

$$b_{n+1} := \begin{cases} c_{n+1} & \text{falls } y \leqslant c_{n+1}^k \\ b_n & \text{sonst} \end{cases} \tag{69}$$

Damit gilt $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \tag{70}$$

$$a_n^k \leqslant y \leqslant b_n^k \tag{71}$$

und daher $I_{n+1} \subset I_n$. Ein Induktionsargument zeigt, dass

$$|I_n| = \frac{b_0 - a_0}{2^n} = \frac{|I_0|}{2^n} = \frac{|I_0|}{(1+1)^n} \leqslant \frac{|I_0|}{1+n} \tag{72}$$

Zu $\epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{|I_0|}{1+n} < \frac{|I_0|}{1+n_0} < \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Daher gilt $|I_n| \to 0$ for $n \to \infty$, d.h. $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Intervallschachtelung. Nach Satz 2.29 gibt es ein eindeutiges $x \in (0, \infty)$ mit $a_n \leqslant x \leqslant b_n \forall n \in \mathbb{N}$.

Auch die Intervalle $J_n = [a_n^k, b_n^k]$ bilden eine Intervallschachtelung:

$$a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \tag{73}$$

$$\Longrightarrow a_n^k \leqslant a_{n+1}^k \leqslant b_{n+1}^k \leqslant b_n^k \tag{74}$$

$$\Longrightarrow J_{n+1} \subset J_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{75}$$

Außerdem:

$$|J_n| = b_n^k - a_n^k = b_n^k \left(1 - \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^k\right) \tag{76}$$

$$= b_n^k (1 - \frac{a_n}{b_n}) \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^j \tag{77}$$

$$\leqslant b_n^{k-1}(b_n - a_n)^k \tag{78}$$

$$\leqslant b_0^{k-1} k \frac{b_0 - a_0}{2^n} \tag{79}$$

$$\leqslant \frac{c_k}{2^n} \tag{80}$$

wobei c_k eine Konstente ist, welche nur von a_0, b_0 und k abhängt.

Wie vorher zeigt man, dass $|J_n| \to 0$ für $n \to \infty$. Aus den vorherigen Überlegungen folgt, dass

$$x^k, y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n \tag{81}$$

Damit gilt nach Satz 2.29, dass $x^k = y$.

□

Definition 2.31. Seien $y \in (0, \infty), k \in \mathbb{N}^*$. Die eindeutige Zahl $x \in (0, \infty)$ mit $x^k = y$ heißt **k-te Wurzel** von y. Notation:

$$x = \sqrt[k]{y} \tag{82}$$

Für $k = 2$ schreiben wir auch $x = \sqrt[2]{y} =: \sqrt{y}$.

Definition 2.32. Seien X, Y Mengen und sei $M \subset Y$. Dann heißt

$$f^{-1}(M) := \{x \in X : f(x) \in M\} \tag{83}$$

Urbildmenge von M.

Satz 2.33. *Sei*

$$\mathfrak{F} := \{a : \mathbb{N} \to \{0, \dots, 9\} : \#a^{-1}(\{0, \dots, 8\}) = \infty\} \tag{84}$$

*das bedeutet, die Menge aller Folgen, sodass die Urbildmenge von $\{0, \dots, 8\}$ unendlich viele Elemente hat. Dann gibt es eine Bijektion $\varphi\colon [0, 1) \to \mathfrak{F}$. Sei nun $x \in \mathbb{R}$ und $r = x - \lfloor x \rfloor$ und sei $a := (a_k)_{k\in\mathbb{N}} := \varphi(r)$, dann schreiben wir x in der **Dezimalbruchdarstellung** als*

$$x = \lfloor x \rfloor.a_1a_2a_3\dots \tag{85}$$

Beweis.

- Sei $r \in [0, 1)$. Wir setzen $r_0 := r, a_0 := 0$ und für $k \in \mathbb{N}, a_k = \lfloor 10^k r_k \rfloor \in \{0, \dots, 9\}$.

$$r_{k+1} := r_k - \frac{1}{10^k} a_k \in \left[0, \frac{1}{10^k}\right]$$

- Dies definiert induktiv eine Folge $a := (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \{0, \dots, 9\}$. Nach Konstruktion gilt

$$r = m_k + r_k \in I_k = [m_k, M_k] \tag{86}$$

wobei

$$m_k := a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_k}{10^k} \tag{87}$$

$$M_k := m_k + \frac{1}{10^k} \tag{88}$$

- Nach Konstruktion gilt:

$$r = m_k + r_k \in I_k = [m_k, M_k) \subset \bar{I}_k := [m_k, M_k] \tag{89}$$

Außerdem ist $(\bar{I}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung.

- Wir zeigen als nächstes, dass $\#a^{-1}(\{0,\dots,8\}) = \infty$ durch Widerspruch:

Andernfalls gälte $\#a^{-1}(\{0,\dots,8\}) < \infty$, das heißt es gäbe ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_k = 9 \forall k > k_0$. Insbesondere gilt dann:

$$M_{k+1} = m_{k+1} + \frac{1}{10^{k+1}} = m_k + \frac{q^{k+1}}{10^{k+1}} = m_k + \frac{1}{10^k} \tag{90}$$

$$= M_k \quad \forall k > k_0 \tag{91}$$

d.h. $\exists M \in [0,1]$ mit $M_k = M \quad \forall k > k - 0$.

Daraus folgt, dass $M \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bar{I}_k$ aber $M \notin \bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k$.

Da $r \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bar{I}_k$ folgt $M = r$.

Da $r \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k$ folgt $M \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k$ ↯ .

Daher ist $a \in \mathfrak{F}$.

- Es bleibt zu zeigen, dass φ bijektiv ist.

Seien also $r, r' \in [0,1)$ mit $\varphi(r) = \varphi(r') = a$ für ein $a \in \mathfrak{F}$. Dann gilt $r, r' \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k$, wobei I_k aus a wie oben konstruiert ist. Aus Satz 2.29 folgt $r = r'$. Damit ist φ injektiv.

Sei nun $a \in \mathfrak{F}$ und sei $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die oben konstruierte intervallschachtelung. Dann gibt es ein $r \in [0,1]$ mit $r \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bar{I}_k$.

Da $a \in \mathfrak{F}$ folgt $r \in [0,1)$.

Nach Konstruktion folgt $\varphi(r) = a$.

□

2.4 Abzählbare und überabzählbare Mengen

Definition 2.34 (Kardinalzahl)**.** Seien M, N zwei Mengen. Wir sagen M und N haben die gleiche **Kardinalität**, dalls eine Bijektion $M \to \mathbb{N}$ existiert.

1. Eine Menge heißt **endlich**, falls ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Bijektion $M \to \{1,\dots,n\}$ existiert. In diesem Fall sagen wir auch, die Kardinalität von M ist n. Notation:

$$\#M = n \tag{92}$$

Eine nichtendliche Menge heißt **unendlich**. Notation:

$$\#M = \infty \tag{93}$$

2. Eine unendliche Menge heißt abzählbar, falls eine Bijektion $M \to \mathbb{N}$ existiert.

Beispiel 2.35. Die Menge der geraden natürlichen Zahlen ist abzählbar, da eine Bijektion $\mathbb{N} \to 2\mathbb{N}, n \mapsto 2n$ zugeordnet ist. Auch die ganzen Zahlen sind abzählbar, da es eine Abzählung $0, 1, -1, 2, -2, \dots$ gibt.

Lemma 2.36. *Sei X abzählbar.*

1. *Sei $Y \subset X$. Dann ist Y endlich oder abzählbar.*
2. *Sei $f: X \to Y$ surjektiv. Dann ist Y endlich oder abzählbar.*
3. *Sei $n \geqslant 1 \in \mathbb{N}$ und seien $X_1, \dots, X_n$ abzählbare Mengen, dann ist $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ abzählbar.*

Beweis.

1. Es reicht zu zeigen, dass jede Teilmenge von $\mathbb{N}$ endlich oder abzählbar ist. Sei also $Y \subset \mathbb{N}$. Falls Y nach oben beschränkt ist, ist Y endlich. Sei also Y nach oben unbeschränkt. Wir definieren $\varphi: \mathbb{N} \to Y$ durch $\varphi(0) := \min Y$ und induktiv

$$\varphi(n+1) := \min\{y \in Y : y > \varphi(n)\} \tag{94}$$

   φ ist wohldefiniert, da Y unbeschränkt ist und jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ ein Minimum hat. Es bleibt zu zeigen, dass φ bijektiv ist. Sei nun $y_0 \in Y$. Da Y unbeschränkt ist, ist die Menge

$$M := \{n \in \mathbb{N} : \varphi(n) \geqslant y_0\}$$

   nicht leer. Damit existiert $m := \min M$. Da $m \in M$, folgt $\varphi(m) \geqslant y_0$. Falls $m = 0$, dann folgt $\varphi(m) = \varphi(0) = \min Y \geqslant y$.

   Andernfalls gilt $m > 0$. Dann ist $m - 1 \in \mathbb{N}, m - 1 \notin M$ (da $m = \min M$), d.h. $\varphi(m-1) < y_0$. Aus (94) folgt dann, dass $\varphi(m) \leqslant y_0$. Insgesamt $\varphi(m) = y_0$. Daher ist φ surjektiv und damit bijektiv.

2. Da X abzählbar ist $\exists \varphi: \mathbb{N} \to X$ bijektiv. Dann ist $F := f \circ \varphi: \mathbb{N} \to Y$ surjektiv. Für $y \in Y$ defrinieren wir

$$n(y) := \min\{n \in \mathbb{N} : F(n) = y\} \tag{95}$$

   Da F surjektiv ist, ist $n(y)$ wohldefiniert.

   Aus (95) folgt, dass $n: Y \to \mathbb{N}$ injektiv ist. Damit ist $n: Y \to n(Y)$ bijektiv.

   Aber $n(Y) \subseteq \mathbb{N}$ ist endlich oder abzählbar nach (**??**). Damit ist auch Y endlich oder abzählbar.

3. ($\to$ Übungszettel) Es ist leicht zu sehen, dass $X_1 \times X_2$ abzählbar ist. Aus einem Induktionsargument folgt die Aussage.

□

Korollar 2.37. *$\mathbb{Q}$ ist abzählbar.*

Beweis. Die Mengen $\mathbb{Z}, \mathbb{N}^*$ sind abzählbar und damit auch $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Die Abbildung $\varphi: \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}, \quad (m,n) \mapsto \frac{m}{n}$ ist surjektiv. Nach Lemma 2.36 ist $\mathbb{Q}$ abzählbar (da es nicht endlich ist). □

Satz 2.38. *$\mathbb{R}$ ist überabzählbar.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass $[0,1)$ überabzählbar ist.
Angenommen, $[0,1)$ sei abzählbar. Dann existiert eine surjektive Folge $r\colon \mathbb{N} \to [0,1)$. Wir schreiben $r_k := r(k)$. Nach der Dezimalbruchdarstellung gibt es zu r_k eien Folge $a_k = (a_{kj})_{j\in\mathbb{N}}$ mit

$$\begin{aligned} r_0 &= 0.a_{00}a_{01}a_{02}a_{03}\dots \\ r_1 &= 0.a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}\dots \\ r_2 &= 0.a_{20}a_{21}a_{22}a_{23}\dots \\ &\dots \end{aligned}$$

Insbesondere gibt es eine Folge $b = (b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $b_j \neq a_{jj}, b_j \neq 9$.
Es folgt, dass

$$r^* = 0.b_1b_2b_3\dots \notin r(\mathbb{N})$$

Wir wählen die Folge $b \in \mathbb{F}$, d.h. so, dass sie eine zulässige Dezimalbruchdarstellung ergibt. Dann ist $r^* \notin r(\mathbb{N})$, d.h. r ist nicht surjektiv. $\lightning$, d.h. $[0,1)$ ist nicht abzählbar. □

Satz 2.39. *Sei M eine Menge. Dann sind M und $\mathscr{P}(M)$ nicht gleich mächtig.*

Beweis. Wir argumentieren indirekt. Sei also $\varphi\colon M \to \mathscr{P}(M)$ eine Bijektion. Wir definieren

$$A := \{x \in M : x \notin \varphi(X)\} \tag{96}$$

Da φ bijektiv ist, gibt es ein $y \in M$ mit $A = \varphi(y)$.
Falls $y \in A$ ist, dann gilt nach (96) $y \notin \varphi(y) = A$, ein Widerspruch.
Falls $y \notin A$, dann gilt nach (96), dass $y \in A \lightning$.
Damit ist φ keine Bijektion, d.h. M und $\mathscr{P}(M)$ snd nicht gleich mächtig. □

2.5 Normierte und metrische Räume

Der Raum $\mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}$ besteht aus den d-Tupeln bzw. **Vektoren**

$$x = (x_1, \dots, x_d), x_k \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, d \tag{97}$$

Auf $\mathbb{R}^d$ definieren wir für $x, y \in \mathbb{R}^d, \alpha \in \mathbb{R}$:

$$x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_d + y_d) \tag{98}$$

$$\alpha \cdot x := (\alpha x_1, \dots, \alpha x_d) \tag{99}$$

wobei $x = (x_1, \dots, x_d), y = (y_1, \dots, y_d)$.
Wir definieren außerdem als **Euklidische Norm**:

$$\|x\| := \sqrt{\sum_{k=1}^{d} |x_k|^2} \tag{100}$$

Definition 2.40. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Eine Menge X, versehen mit einer **Addition** $+ : X \times X \to X$ und **skalaren Multiplikation** $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ heißt **Vektorraum**, falls $\forall x, y, z \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt:

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$
2. Es gibt ein Element in X, 0 genannt, sodass $x + 0 = x \forall x \in X$
3. Zu jedem $x \in X$ existiert ein Inverserses, $-x$ genannt, und $x + (-x) = 0$
4. $x + y = y + x$
5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
6. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
8. $1x = x$

Falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dann heißt X reeller Vektorraum. Falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, heißt X komplexer Vektorraum.

Definition 2.41. Sei X ein reeller Vektorraum. Eine Abbildung $\| \cdot \| : x \to [0, \infty)$ heißt **Norm**, falls

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$ und $\|x\| \geqslant 0 \quad \forall x \in X$ (Definitheit)
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in X$ (positive Homogenität)
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$ (Dreiecksungleichung)

Ein Vektorraum mit einer Norm heißt normierter (Vektor)raum.

Beispiel 2.42.

- $\mathbb{R}$ mit der Norm $| \cdot |$ ist ein normierter Vektorraum.
- $\mathbb{R}^d$ mit der Norm $\| \cdot \|$ ist ein normierter Vektorraum.
- Sei $E \in \mathbb{R}$. Der Raum der Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ ist ein Vektorraum mit der Definition

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \tag{101}$$
$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x) \tag{102}$$

- Sei $E \in \mathbb{R}$. Sei $B(E)$ der Raum der beschränkten Funktionen $f\colon E \to \mathbb{R}$ mit $\sup_{x \in E} f(x) < \infty$.

  Dann ist $B(E)$ mit der Norm
  $$\|f\| := \sup_{x \in E} f(x)$$
  ein normierter Vektorraum.

Definition 2.43. Ein **metrischer Raum** X ist eine Menge X, versehen mit einer sogenannten Metrik $d\colon X \times X \to [0, \infty)$, sodass $\forall x, y \in X$ gilt:

1. $d(x, y) = 0, \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$ (Definitheit)
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
3. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ (Dreiecksungleichung)

Beispiel 2.44.
- $\mathbb{R}$ mit der Metrik $d(x,y) = |x-y|$, $\mathbb{R}^d$ mit der Metrik $d(x,y) = \|x-y\|$ sind metrische Räume.
- Sei $E \neq \emptyset$ eine Menge. Dann definiert

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Metrik.
- Der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten auf der Kugeloberfläche definiert eine Metrik.
- Sei X ein metrischer Raum mit Metrik $d_X \colon X \times X \to [0, \infty)$ und sei $E \subset X$. Dann ist auch E ein metrischer Raum mit der induzierten Metrik $d_E \colon E \times E \to [0, \infty)$

$$d_E(x,y) := d_X(x,y) \quad \forall x, y \in E$$

Lemma 2.45. *Sei X ein normierter Raum. Dann ist X, versehen mit der induzierten Metrik*

$$d(x,y) := \|x - y\|$$

ein metrischer Raum.

Beweis. Folgt direkt aus den Definitionen von normierten und metrischen Räumen □

Definition 2.46. Sei X ein metrischer Raum. Für $x \in X, R > 0$ definieren wir die **offene Kugel** um x mit Radius R als die Menge

$$B_R(x) := \{y \in X : d(x,y) < R\} \tag{103}$$

Die **abgeschlossene Kugel** um x mit Radius R ist definiert als

$$\bar{B}_R(x) := \{y \in X : d(x,y) \leqslant R\} \tag{104}$$

Definition 2.47. Sei X ein metrischer Raum. Eine Menge $E \subset X$ heißt **beschränkt**, falls es $x \in X, R > 0$ gibt mit $E \subset B_R(x)$.

Definition 2.48. Sei X ein metrischer Raum.

(i) Eine Menge $\Omega \subset X$ heißt **offen**, falls für alle $x \in \Omega$ ein $\epsilon > 0$ existiert mit $B_\epsilon(x) \subset \Omega$.

(ii) Eine Menge Ω heißt **offene Umgebung von x**, falls $x \in \Omega$ und Ω offen ist.

(iii) Eine Menge $A \subset X$ heißt **abgeschlossen**, falls $X \backslash A$ offen ist.

Beispiel 2.49. (i) Seien $a, b \in \mathbb{R}, a \neq n$. Dann ist das Intervall (a, b) offen, das Intervall $[a, b]$ abgeschlossen. Die Intervalle $[a, b), (a, b]$ sind weder offen noch abgeschlossen.

(ii) In jedem metrischen Raum X sind die Mengen $\emptyset, X$ sowohl offen als auch abgeschlossen.

(iii) Die offene Kugel $B_R(x)$ ist offen, die abgeschlossene Kugel ist abgeschlossen.

In der Tat: Sei $x \in B_R(x)$. Dann ist $\epsilon := R - d(x, y) > 0$ und es gilt $B_\epsilon(y) \subset B_R(x)$. In der Tat, für alle $z \in B_\epsilon(y)$ gilt

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + \epsilon = R$$

Damit folt $z \in B_R(x)$. Das Argument für $\bar{B}_R(x)$ verläuft ähnlich.

Satz 2.50 (Morgansche Regeln)**.** *Sei X eine Menge, sei A eine beliebige Indexmenge und seien $F_\alpha \subset X, \alpha \in A$ Mengen. Dann gilt*

$$\left(\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \right)^C = \bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha^C \tag{105}$$

und

$$\left(\bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha \right)^C = \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha^C \tag{106}$$

Beweis. Übung. □

Satz 2.51. *Sei X ein metrischer Raum.*

(i) Endlicher Durchschnitt offener Mengen Ω_i offen für $i = 1, \ldots, n$

$$\bigcap_{i=1}^{n} \Omega_i \text{ offen}$$

(ii) Beliebige Vereinigung offener Mengen. Sei A eine beliebige Indexmenge, dann gilt

$$\Omega_\alpha \text{ offen } \forall \alpha \in A \implies \bigcup_{\alpha \in A} \Omega_\alpha \text{ offen}$$

(iii) Die endliche Vereinigung und der beliebige Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Beweis. (i) Es reicht zu zeigen, dass der Durchschnitt $\Omega := \Omega_1 \cap \Omega_2$ von zwei offenen Mengen offen ist. Der Beweis für allgemeine $n \in \mathbb{N}$ folgt mit vollständiger Induktion.

Sei also $x \in \Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$. Dann gilt $x \in \Omega_1, x \in \Omega_2$ und es gibt $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ mit $B_{\epsilon_1}(x) \subset \Omega_1, B_{\epsilon_2}(x) \subset \Omega_2$. Sei $\epsilon := \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$. Dann gilt $B_\epsilon(x) \subset \Omega_1 \cap \Omega_2 \subset \Omega$.

(ii) Sei $\Omega := \bigcup_{\alpha \in A} \Omega_\alpha$ und sei $x \in \Omega$. Dann gibt es ein $\alpha \in A$ mit $x \in \Omega_\alpha$. Da Ω_α offen ist, gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subset \Omega_\alpha$. Damit gilt $B_\epsilon(x) \subset \Omega_\alpha \subset \Omega$.

(iii) Folgt aus (i), (ii) und Satz 2.51.

□

Definition 2.52. Sei X ein metrischer Raum, $E \subset X$.

(i) Das Innere $\mathring{E}$ von E ist die Menge

$$\mathring{E} = \bigcup \{\Omega : \Omega \text{ offen }, \Omega \subset E\} \tag{107}$$

(ii) Der Abschluss $\bar{E}$ von E ist definiert als

$$\bar{E} = \bigcap \{A : E \subset A, A \text{ abgeschlossen}\} \tag{108}$$

(iii) Der Rand ∂E von E ist definiert als die Menge

$$\partial E := \bar{E} \backslash \mathring{E} \tag{109}$$

Beispiel 2.53. (i) Es gilt $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}, \mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset, \partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ und $\overline{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}} = \mathbb{R}, (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})^\circ = \emptyset, \partial(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

(ii) Sei $X = \mathbb{R}^d$ mit der Standard-Euklidischen Metrik. Sei $E = \{x\}$ fpr ein $X \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt $\mathring{E} = \varnothing, \bar{E} = \{x\}$.

Beweis. Übungszettel □

Definition 2.54. Sei X ein metrischer Raum.

(i) Die Menge $E \subset X$ heißt **dicht** in X falls $\bar{E} = X$

(ii) Ein metrischer Raum heißt **separabel**, falls es eine abzählbare dichte Teilmenge gibt.

Beispiel 2.55. (i) Da $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, ist $\mathbb{R}$ (mit der Standardmetrik versehen) seperabel.

(ii) Die Menge $\mathbb{R}$ mit der Metrik

$$\tilde{d}(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases} \tag{110}$$

ist nicht separabel.

Lemma 2.56. *Sei X ein metrischer Raum und sei $E \subset X$.*

(i) $\mathring{E}$ ist die größte offene, in E enthaltene Menge (d.h. $\mathring{E}$ ist offen und $\Omega \subset \mathring{E}$ für jede offene Teilmenge von E).

(ii) Der Abschluss $\bar{E}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, welche E enthält (d.h. $\bar{E}$ ist abgeschlossen und ist in jeder abgeschlossenen Obermenge von E enthalten).

(iii) Es gilt $(\bar{E})^C = (E^C)^\circ$

(iv) Es gilt $\partial E = \bar{E} \cup (\mathring{E})^C$. Insbesondere ist ∂E abgeschlossen.

(v) ∂E ist die Menge aller $x \in X$, sodass $B_\epsilon(x) \cup E \neq \varnothing, \quad B_\epsilon(x) \cup E^C \neq \varnothing \quad \forall x \in \partial E$, d.h. ∂E ist die Menge aller Punkte aus X, für die jede Umbegung einen Punkt sowohl aus E als auch aus E^C enthält.

Beweis. (i) Es reicht zu zeigen, dass $\mathring{E}$ offen ist. Dies folgt aus den Morganschen Regeln.

(ii) Es reicht zu zeigen, dass $\bar{E}$ abgeschlossen ist. Dies folgt aus den Morganschen Regeln.

(iii) Folgt aus den Morganschen Regeln. In der Tat:

$$\begin{aligned}
(\bar{E})^C &= \left(\bigcap\{A : A \text{ abgeschlossen }, E \subset A\}\right)^C && (111)\\
&= \bigcup\{A^C : A \text{ abgeschlossen }, E \subset A\} && (112)\\
&= \bigcup\{A^C : A^C \text{ offen }, A^C \subset E^C\} && (113)\\
&= \bigcup\{\Omega : \Omega \text{ offen }, \Omega \subset E^C\} && (114)\\
&= \left(E^C\right)^\circ && (115)
\end{aligned}$$

(iv) Folgt, da $\partial E = \bar{E} \backslash \mathring{E} = \bar{E} \cap \left(\mathring{E}\right)^C$ die Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen ist.

(v) Es gilt nach (iv) und (iii):

$$\partial E = \bar{E} \cap (\mathring{E})^C = \left(\left(E^C\right)^\circ\right)^C \cap (\mathring{E})^C$$

Die Behauptung folgt dann aus

$$x \in (\mathring{E})^C \iff x \notin \mathring{E} \iff B_\epsilon(x) \cap E^C \neq \emptyset \quad \forall \epsilon > 0 \tag{116}$$

$$x \in \left(\left(E^C\right)^\circ\right)^C \iff x \notin \left(E^C\right)^\circ \iff B_\epsilon(x) \cap E \neq \emptyset \quad \forall \epsilon > 0 \tag{117}$$

□

Insbesondere gilt $E = \bar{E} \iff E$ ist abgeschlossen, $E = \mathring{E} \iff E$ ist offen.

3 Folgen und Grenzwerte

3.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

Wir betrachten Folgen in metrischen Räumen X. Eine Folge in X ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to X$ oder allgemeiner $\mathbb{N} \cap [k_0, \infty) \to X$. Wir benutzen die Notationen

$$x_0, x_1, x_2, \dots \in X \tag{118}$$

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \tag{119}$$

$$(x_n) \subset X \tag{120}$$

Die Aussagen in diesem Kapitel handeln immer von metrischen Räumen.
Eine Folge $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ heißt reelle Folge.

Definition 3.1 (Konvergenz)**.** Sei (x_n) eine Folge in einem metrischen Raum X. Wir sagen (x_n) gegen $x \in X$ **konvergent**, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n^* \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$n \geqslant n^* \implies d(x_n, x) < \epsilon$$

Der Punkt x heißt dann **Grenzwert** oder **Limes** der Folge. Notation:

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n$$

oder $x_n \to x$ für $n \to \infty$. Die Folge heißt **konvergent**, falls sie konvergiert, andernfalls **divergent**.

Entsprechend konvergiert eine reelle Folge gegen $x \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn es zu $\epsilon > 0$ ein $n^* \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$n \geqslant n^* \implies |x - x_n| < \epsilon$$

Eine Folge x_n in $\mathbb{R}^d$ konvergiert gegen $x \in \mathbb{R}^d$ genau dann, wenn es zu $\epsilon > 0$ ein $n^* \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$n \geqslant n^* \implies \|x - x_n\| < \epsilon$$

Proposition 3.2. *Jede Folge in einem metrischen Raum hat höchstens einen Grenzwert.*

Beweis. Angenommen, die Folge (x_n) hat zwei Grenzwerte x, y mit $x \neq y$, d.h. $x_n \to x, x_n \to y$. Sei $\epsilon := \frac{1}{2} d(x, y) > 0$. Da $x_n \to x, x_n \to y$, gibt es $n_x, n_y \in \mathbb{N}$ mit

$$d(x_n, x) < \epsilon \quad \forall n \geqslant n_x \tag{121}$$

$$d(x_n, y) < \epsilon \quad \forall n \geqslant n_y \tag{122}$$

Damit gilt für $n^* := \max\{n_x, n_y\}$, $d(x, y) \leqslant d(x, x_n) + d(x_n, y) < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = d(x, y)$ und daher $d(x, y) < d(x, y)$ ↯. Damit folgt $x = y$. □

Lemma 3.3. *Sei (x_n) eine Folge in einem metrischen Raum. Dann ist $x_n \to x, x \in X$, äquivalent zu*

$$\#\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin B_\epsilon(x)\} < \infty \quad \forall \epsilon > 0 \tag{123}$$

Beweis. **„⇐“** Es gelte $x_n \to x$ und sei $\epsilon > 0$. Dann gbt es $n^* \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in B_\epsilon(x) \forall n \geqslant n^*$. Dann gilt

$$\#\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin B_\epsilon(x)\} \leqslant n^* + 1 < \infty$$

d.h. (123) gilt.

„$\Rightarrow$“ Es gelte (123) und sei $\epsilon > 0$. Dann ist die Menge $\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin B_\epsilon(x)\}$ endlich und hat daher ein maximum, welches wir n^* nennen. Insbesondere gilt $d(x_n, x) < \epsilon \quad \forall n \geqslant n^* + 1$

□

Beispiel 3.4. (i) Sei $x_n = x$ eine konstante Folge. Dann gilt $x_n \to x$. In der Tat, $\{n : x_n \notin B_\epsilon(x)\}$ ist leer für alle $\epsilon > 0$ und daher endlich.

(ii) Sei X ein metrischer Raum. Dann gilt $x_n \to x$ genau dann, wenn $d_n := d(x_n, x) \to 0$. Eine reelle Folge (d_n) mit $d_n \to 0$ heißt **Nullfolge**

(iii) Sei $x_n = \frac{1}{n}$. Dann ist (x_n) eine Nullfolge, d.h. $x_n \to 0$. In der Tat, nach dem Satz von Archimedes gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $n^* \in \mathbb{N}$ mit $n^* > \frac{1}{\epsilon}$, d.h. $\epsilon > \frac{1}{n}^*$. Damit folgt $\frac{1}{n} < \epsilon \quad \forall n \geqslant n^*$.

(iv) Die Folgen $x_n = (-1)^n$ und $y_n = n$ sind divergent.

Definition 3.5 (Beschränktheit)**.** (i) Eine Folge (x_n) heißt **beschränkt**, falls $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist.

(ii) eine reelle Folge (x_n) heißt **nach oben (unten) beschränkt**, falls $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ nach oben (unten) beschränkt ist.

Lemma 3.6. *Jede konvergente Folge in einem metrischen Raum ist beschränkt.*

Beweis. Sei x_n eine Folge mit $x_n \to x$. Zu $\epsilon := 1$ gibt es also ein $n^* \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in B_1(x) \quad \forall n \geqslant n^*$. Sei

$$R := \max\{d(x, x_k) : k = 0, \ldots, n^* - 1\}$$

Dann gilt $x_n \in B_{R+1}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$. □

Definition 3.7 (Monotonie)**.** Eine reelle Folge x_n heißt

(i) **monoton wachsend**, falls $m < n \implies x_m \leqslant x_n \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$.

(ii) **streng monoton wachsend**, falls $m < n \implies x_m < x_n \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$.

(iii) **monoton fallend**, falls $m < n \implies x_m \geqslant x_n \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$.

(iv) **streng monoton fallend**, falls $m < n \implies x_m > x_n \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$.

Definition 3.8 (Teilfolgen)**.** Eine Folge $(\tilde{x}_n)$ heißt **Teilfolge** der Folge x_n, falls es eine streng monoton wachsende Folge $(n_j) \subset \mathbb{N}$ gibt mit $\tilde{x}_j = x_{n_j}$.

Lemma 3.9. *Sei (x_n) eine Folge mit $x_n \to x$. Dann konvergiert auch jede Teilfolge (x_{n_j}) von (x_n) gegen x, d.h. $x_{n_j} \to x$ für $j \to \infty$.*

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Da $x_n \to x$ gibt es $n^* \in \mathbb{N}$ mit $d(x, x_n) < \epsilon \quad \forall n \geqslant n^*$. Da n_j streng monoton wächst, gibt es zu n^* ein $j^* \in \mathbb{N}$ mit $n_j > n^*$ für alle $j \geqslant j^*$. $d(x_n, x) < \epsilon \forall j \geqslant j^*$. □

Definition 3.10 (Häufungspunkte)**.** Sei x_n eine Folge in einem metrischen Raum udn sei $x \in X$. Dnan heißt x **Häufungspunkt** der Folge x_n, falls es eine Teilfolge x_{n_j} von x_n gibt mit

$$x_{n_j} \to x \quad \text{für } j \to \infty$$

Korollar 3.11. *Jeder Grenzwert ist auch Häufungspunkt. Jede konvergente Folge hat genau einen Häufungspunkt.*

Beweis. Sei x_n eine konvergente Folge mit $x_n \to x$. Sicherlich ist x ein Häufungspunkt. Sei x ein weiterer Häufungspunkt. Dann gibt es eine Teilfolge (x_{n_j}) mit $x_{n_j} \to y$ foür $j \to \infty$. Aus Lemma 3.9 folgt $x_{n_j} \to x$ für $j \to \infty$. Da der Grenzwert eindeutig ist, folgt $x = y$. □

Lemma 3.12. *Sei x_n eine Folge in einem metrischen Raum. Dann ist $x \in X$ genau dann Häufungspunkt der Folge, wenn*

$$\#\{n : x_n \in B_\epsilon(x)\} = \infty \quad \forall \epsilon > 0 \tag{124}$$

Beweis. „$\Leftarrow$“ Sei x HP der Folge. Dann existiert eine TF x_{n_j} mit $x_{n_j} \to x$ für $j \to \infty$. Aus Lemma 3.3 folgt, dass

$$\#\{j \in \mathbb{N} : x_{n_j} \in B_\epsilon(x)\} = \infty \quad \forall \epsilon > 0$$

Daraus folgt (124).

„⇒“ Es gelte (124). Wir definiere $n_0 = 0$ und induktiv

$$n_{j+1} := \min\{n \in \mathbb{N} : n > n_k, x_n \in B_{\frac{1}{j}}(x)\} \tag{125}$$

Aus (124) folgt, dass die Menge auf der rechten Seite von (124) nicht leer ist, und daher existiert das Minimum. Damit ist die Folge $(n_j) \subset \mathbb{N}$ wohldefiniert und streng monoton steigend. Damit definiert $\tilde{x}_j := x_{n_j}$ eine Teilfolge. Nach Definition der Folge gilt

$$d(x, x_{n_j}) < \frac{1}{j}$$

Man zeigt leicht, dass $d(x, x_{n_k}) \to 0$. Nach Beispiel 3.4(ii) folgt, dass $x_{n_j} \to x$.

□

Proposition 3.13. *Seien $(x_n), (y_n)$ konvergente, reelle Zahlenfolgen mit $x_n \to x, y_n \to y, x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

(i) $x_n + y_n \to x + y$

(ii) $x_n y_n \to xy$

(iii) *Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda x_n + \mu y_n \to \lambda x + \mu y$.*

(iv) $\frac{x_n}{y_n} to \frac{x}{y}$ *falls* $y \neq 0, y_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$

(v) $|x_n| \to |x|$

(vi) $y_n \leqslant y_n \implies x \leqslant y$

Beweis. (i) Zu $\epsilon > 0$ gibt es $n_x, n_y \in \mathbb{N}$ mit $|x - x_n < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geqslant n_x, |y - y_n| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geqslant n_y$. Es folgt

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| \leqslant |x_n - x| + |y_n - y| \tag{126}$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \forall n \geqslant n^* := \max\{n_x, n_y\} \tag{127}$$

d.h. $x_n + y_n \to x + y$

(ii) Da $(x_n), (y_n)$ konvergent sind, sind sie auch beschränkt, d.h. es gibt eine Konstante $C > 0$ mit

$$|x_n| \leqslant C, |y_n| \leqslant C \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{128}$$

Damit gilt

$$|x_n y_n - xy| = |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| \tag{129}$$

$$\leqslant |x_n y_n - x_n y| + |x_n y - xy| \tag{130}$$

$$\leqslant |x_n||y_n - y| + |y||x_n - x| \tag{131}$$

$$\leqslant C\,(|y_n - y| + |x_n - x|) \tag{132}$$

Zu $\epsilon > 0$ gibt es ein $n^* \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2C}, |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2C} \quad \forall n \geqslant n^* \implies |x_n y_n - xy| < C(\frac{\epsilon}{2C} + \frac{\epsilon}{2C}) = \epsilon \quad \forall n \geqslant n^* \implies x_n y_n \to xy$.

(iii) Übungszettel.

(iv) Übungszettel.

(v) Übungszettel.

(vi) Übungszettel.

□

Lemma 3.14 (Sandwichlemma)**.** *Seien x_n, y_n, z_n reelle Folgen mit $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ und mit $x_n \to x, z_n \to x$. Dann folgt $y_n \to x$.*

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ fest. Dann existiert $n^* \in \mathbb{N}$ mit $|x - x_n| < \epsilon, |x - z_n| < \epsilon \quad \forall n \geqslant n^* \implies x - \epsilon \leqslant x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < x + \epsilon \quad \forall n \geqslant n^* \implies |x - y_n| < \epsilon \implies y_n \to x$ für $n \to \infty$. □

Lemma 3.15. *Sei x_n eine Folge in einem metrischen Raum. Sei $d_n \to 0$ eine NUllfolge und sei $d(x, x_n) \leqslant d_n$. Dann folgt $x_n \to x$ für $n \to \infty$.*

Beweis. Übungszettel □

Satz 3.16. *Sei $x = \left(x^{(1)}, \dots, x^{(d)}\right) \in \mathbb{R}^d$ und sei $x_n = \left(x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(d)}\right) \in \mathbb{R}^d$ eine Folge in $\mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}^*$. Dann gilt $x_n \to x$ in $\mathbb{R}^d$ genau dann, wenn $x_n^{(k)} \to x^{(k)}$ in $\mathbb{R} \quad \forall k = 1, \dots, d$.*

Beweis. „⇒“ Es gelte $x_n \to x$ in $\mathbb{R}^d$. Dann gilt

$$\left|x_n^{(k)} - x^{(k)}\right| \leqslant \|x_n - x\| \to 0 \quad \forall k = 1, \dots, d$$

. Aus Lemma 3.5(?) folgt,

$$x_n^{(k)} \to x^{(k)} \quad \forall k = 1, \dots, d$$

„⇐“ Es gelte $x_n^{(k)} \to x^{(k)} \quad \forall k = 1, \dots, d$. Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es $n^* \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|x_n^{(k)} - x^{(k)}\right| < \frac{\epsilon}{\sqrt{d}} \qquad \forall n \geqslant n^* \forall k = 1, \dots, d \tag{133}$$

$$\implies \|x_n - x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{d} \left|x_n^{(k)} - x^{(k)}\right|} < d\left(\frac{\epsilon}{d}\right) = \epsilon \quad \forall n \geqslant n^*, \forall k = 1, \dots, d \tag{134}$$

$$\implies x_n \to x \tag{135}$$

□

Satz 3.17. *Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^d$ hat einen Häufungspunkt.*

Beweis. (1) $d = 1$. Sei x_n eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann gibt es $R > 0$ mit $|x_n| < R \forall n \in \mathbb{N}$, d.h. $x_n \in I_0 := [-R, R] \forall n \in \mathbb{N}$. Wir unterteilen I_0 in die beiden Intervalle $[-R, 0], [0, R]$. Dann muss es eines der beiden Intervall $[-R, 0], [0, R]$ unendlich viele Folgenglieder enthalten. Wir nennen diese Intervalle $I_1 \in \{[-R, 0], [0, R]\}$. Induktiv konstruieren wir so eine Folge von Intervallen $I_n, n \in \mathbb{N}$ mit $I_{n+1} \subset I_n$, $|I_n| \leqslant \frac{R}{2^{n-1}} \to 0$ und jedes I_n enthält unendlich viele Folgeglieder. Nach Satz 2.28(?) gibt es $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Jede Umgebung von x enthält ∞ viele Folgelieder. Damit ist x ein Häufungspunkt der Folge.

(2) $d > 1$: Sei $x_n = (x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(d)})$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}^d$. Dann sind $x_n^{(k)}, k = 1, \ldots, d$ beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$. Nach (1) gibt es eine Teilfolge $x'_j = x_{n_j}$ von x_n, sodass die 1. Komponente konvergiert. Weiterhin gibt es eine Teilfolge $x''_k = x'_{k_j}$ von x'_j, sodass auchd ie zweite Komponente konvergiert. Induktiv konstruieren wir so eine Teilfolge $\tilde{x}_n$ von x_n, sodass alle Komponenten von $\tilde{x} - n$ konvergieren. Nach Satz 3.16 gilt $\tilde{x}_n \to x$ für ein $x \in \mathbb{R}^d$.

□

3.2 Monotone Folgen, uneigentliche Grenzwerte

Lemma 3.18. *Sei x_n eine monotone Folge in $\mathbb{R}$. Dann ist die Folge genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist. Falls x_n monoton wächst, dann gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n$, falls x_n monoton fällt, dann gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n$.*

Beweis. „$\Rightarrow$" Sei x_n eine konvergente, monotone FOlge. Lemma 3.6(?) $\implies$ x_n ist beschränkt.

„$\Leftarrow$" Sei x_n eine beschränkte, monotone Folge. O.B.d.A sei x_n monoton wachsend (sonst betrachte $y_n = -x_n$). Die Menge $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$ ist beschränkt. Daher existiert $x^* = \sup A < \infty$. Es bleibt zu zeigen, dass $x_n \to x^*$. In der Tat, da x^* ein Supremum ist, gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $n^* \in \mathbb{N}$ mit $0 \leqslant x^* - x_n^* < \epsilon$. Da x_n monoton wächst, gilt $x_n \geqslant x_{n*} \quad \forall n \geqslant n^*$ und daher $0 \leqslant x - x_n \leqslant x - x_{n*} < \epsilon \quad \forall n \geqslant n^*$ und damit $|x - x_n| < \epsilon \quad \forall n \geqslant n^*$.

Genauso zeigt man, dass für eine konvergente, monotone Folge gilt $\lim_n = \sup_n x_n$, falls x_n monoton wächst (sonst $\lim_n x_n = \inf_n x_n$).

□

Definition 3.19. Sei x_n eine reelle Folge.

i Falls x_n nach oben beschränkt ist, dann definieren wir den **Limes superior** durch

$$\limsup_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{k\geqslant n} x_k \right) \tag{136}$$

ii Falls x_n nach unten beschränkt ist, dann definieren wir den **Limes inferior** durch

$$\liminf_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geqslant n} x_k\right) \tag{137}$$

In der Tat, $\limsup, \liminf$ sind wohldefiniert: Sei z.B. x_n nach oben beschränkt, dann ist die Folge $y_n = \sup_{k\geqslant n} x_k$ wohldefiniert, da $\{x_k : x \geqslant n\}$ nach oben beschränkt und nicht leer ist. AUßerdem fällt y_n monoton und ist beschränkt und hat daher nach Lemma 3.18 einen Grenzwert.

Bemerkung 3.20. Der Limes superior einer nach oben beschränkten Folge ist der größe Häufungspunkt der Folge. Entsprechend $\liminf$.

Beweis. Übung □

Definition 3.21. Wir definieren

$$\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$$

Bemerkung 3.22. Beachte, dass $\bar{\mathbb{R}}$ kein Körper ist. Allerdings lassen sich die Ordnungsrelationen von $\mathbb{R}$ auf $\bar{\mathbb{R}}$ erweitern mit der Definition $-\infty < x < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
Der Raum $\bar{\mathbb{R}}$ lässt sich metrisieren durch

$$\bar{d}(x,y) := \frac{|x-y|}{|x|+|y|} \text{ für } x, y \in \mathbb{R}$$

und

$$\bar{d}(\pm\infty, x) := 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

und $\bar{d}(\infty,\infty) := 0, \bar{d}(-\infty,-\infty) := 0, \bar{d}(\pm\infty,\mp\infty) := 1$.
Sei x_n eine Folge in $\mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $x_n \to x$ bezüglich $d(x,y) = |x-y|$ genau dann, wenn $x_n \to x$ bezüglich $\bar{d}(x,y)$.

Wir definieren eine weitere Metrik auf $\bar{\mathbb{R}}$:

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|+1}, & x \in \mathbb{R} \\ \pm x, & x = \pm\infty \end{cases} \tag{138}$$

$$\tilde{d} \colon \bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}} \to [0, \infty), \tag{139}$$

$$\tilde{d}(x, y) := |\rho(x) - \rho(y)| \tag{140}$$

$\bar{\mathbb{R}}$ Abschluss von $\mathbb{R}$ bezüglich $\tilde{d}$, $(\mathbb{R}, \tilde{d})$ Zwei-Punkt-Kompaktifizierung von $\mathbb{R}$.

Definition 3.23. Sei $x_m \in \mathbb{R}$ eine reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(i) Wir sagen x_n **divergiert gegen** ∞ (oder konvergiert uneigentlich gegen ∞), falls es für jedes $R \in \mathbb{R}$ ein $n^* \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $x_n > R$ für alle $n > n^*$. Wir sagen, die Folge x_n **divergiert gegen** $-\infty$, falls die Folge $-x_n$ gegen ∞ divergiert. Wir benutzen die Notation $x_n \to \infty$ ($x_n \to -\infty$).

  Beispiel: $x_n := n \to \infty$ nach dem Satz von Archimedes.

(ii) Wir sagen ∞ ist **uneigentlicher Häufungspunkt** der Folge x_n, falls es eine gegen ∞ divergente Teilfolge gibt. Ähnlich heißt $-\infty$ uneigentlicher HP, falls es eine gegen $-\infty$ divergente Teilfolge gibt.

(iii) Für eine nach oben (unten) unbeschränkte Menge $E \subset \mathbb{R}$ schreiben wir $\sup E = \infty$ ($\inf E = -\infty$):

(iv) Entsprechend $\limsup_{n\to\infty} x_n = \infty$ ($\liminf_{n\to\infty} x_n = -\infty$), falls eine Teilfolge von x_n gegen ∞ ($-\infty$) divergiert.

3.3 Cauchyfolgen, Vollständigkeit metrischer Räume

Definition 3.25. Sei X ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in X$ heißt **Cauchyfolge**, falls für alle $\epsilon > 0$ ein $n^* \in \mathbb{N}$ existiert mit $n, m \geqslant m^* \implies d(x_n, x_m) < \epsilon$.

Lemma 3.26. *Jede konvergente Folge in einem metrischen Raum ist eine Cauchyfolge.*

Beweis. Sei x_n eine konvergente Folge, $\epsilon > 0$. $\implies \exists n^* \in \mathbb{N} : d(x_m, x) < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geqslant n^* \implies d(x_n, x_m) \leqslant d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \forall n, m \geqslant n^*$ □

Lemma 3.27. *(i) Jede Cauchyfolge in einem metrischen Raum ist beschränkt.*

(ii) Jede Cauchyfolge hat höchstens einen Häufungspunkt. Eine Cauchyfolge konvergiert genau dann, wenn sie einen HP hat.

Beweis. (i) x_n ist Cauchyfolge. Zu $\epsilon = 1 \exists n^* \in \mathbb{N} : d(x_n, x_m) < 1 \quad \forall n, m \geqslant n^*$.

$R = 1 + \max\{d(x_{n^*}, x_j) : j = 0, \dots, n^* - 1\} < \infty \implies \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset B_R(x^*)$ (wobei x^* der Grenzwert ist).

(ii) Sei x Häufungspunkt, $\epsilon > 0$. Dann gibt es $n^* \in \mathbb{N} : d(x_m, x_n) < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall m, n \geqslant n^*$.

x Häufungspunkt $\implies$ es gibt $m \geqslant n^* : d(x, x_m) < \frac{\epsilon}{2} \implies d(x_n, x) < \epsilon \quad \forall n \geqslant n^*$.

Damit $x_n \to x \overset{\text{Kor 3.11}}{\implies} x_n$ besitzt nur einen Häufungspunkt x.

□

Definition 3.28. Ein metrischer Raum X heißt **vollständig**, falls jede Cauchyfolge in X konvergiert.

Satz 3.29. *In einem vollständigen metrischen Raum ist eine Folge genau dann eine Cauchyfolge, wenn sie konvergiert.*

Beweis. Hinrichtung: Folgt aus Definition und Lemma 3.27. Rückrichtung: Lemma 3.26. □

Satz 3.30. $\mathbb{R}^d$ *ist vollständig.*

Beweis. x_n Cauchyfolge $\overset{\text{Lemma 3.27}}{\implies}$ x_n beschränkt $\overset{\text{Satz 3.17(?)}}{\implies}$ x_n hat Häufungspunkt $\overset{\text{Lemma 3.27}}{\implies}$ x_n konvergiert. □

3.4 Kompaktheit, Charakterisierung von Abschluss, Rand

Lemma 3.31. *Sei X metrischer Raum, $A \subset X$. Dann sind äquivalent:*

(i) A ist abgeschlossen.

(ii) Für jede Folge $a_n \in A$ mit $a_n \to a$ gilt $a \in A$

Beweis. A abgeschlossen $\iff$ A^C offen $\iff$ $\forall x \in A^C \exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(x) \subset A^C$ $\iff$ Falls $a \notin A \nexists$ Folge $a_n \in A : a_n \to a$, da zu jedem $\epsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : a_n \in B_\epsilon(a) \cap A \implies A^C$ nicht offen, A nicht abgeschlossen $\lightning$ $\iff$ $\forall$ Folgen $a_n : a_n \to a$ gilt $a \in A$. □

Definition 3.32. Sei $K \subset X, X$ metrischer Raum.

(i) K heißt **folgenkompakt**, wenn für jede Folge $x_n \in K$ eine konvergente Teilfolge x_{n_k} und ein $x \in K$ existieren mit $x_{n_k} \to x$.

(ii) K heißt **kompakt** (überdeckungskompakt), wenn jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung hat.

Das bedeutet: Sei $\Omega_\lambda, \lambda \in \Lambda, \Lambda$ Indexmenge, eine Familie offener Mengen mit $K \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \Omega_\Lambda$. Dann gibt es eine endliche Teilmenge $M = \{1, \dots, m\} \subset \Lambda : K \subset \bigcup_{\lambda \in M} \Omega_\lambda$

Satz 3.33. *Sei X metrischer Raum und sei $K \subset X$. Dann sind äquivalent:*

(i) K ist überdeckungskompakt

(ii) K ist folgenkompakt

Beweis. **(i) $\implies$ (ii)** Sei $x_n \in K$ eine Folge, $A = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. Wir müssen zeigen, dass $\exists x_* \in K : \#(B_\epsilon(x_*) \cap A) = \infty$. Lemma 3.12(?) ∞x_* Häufungspunkt.

Beweis durch Widerspruch: Es gibt kein $x_* \in K \implies \forall x \in K : \exists \epsilon_x > 0 : \#(B_{\epsilon_x}(x) \cap A) < \infty \implies K \subset \bigcup_{x \in K} B_{\epsilon_x}(x)$, d.h. $\{B_{\epsilon_x}(x)\}_{\epsilon_x}$ stellt eine offene Überdeckung von K dar.

(i) $\implies$ es gibt eine endliche Teilüberdeckung, d.h. $x_1 \in K, \epsilon_1 = \epsilon_j : j = 1, \ldots, N$ für $N \in \mathbb{N}, K \subset \bigcup B_\epsilon(x)$[1] nach Konstruktion enthält K nur endlich viele Folgenglieder $\lightning$.

(ii) $\implies$ (i) $\Omega_\lambda, \lambda \in \Lambda$ offene Überdeckung von K, d.h. $K \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Omega_\lambda, \Omega_\lambda$ offen $\forall \lambda \in \Lambda$.

Konstruktion einer endlichen Teilüberdeckung:

Behauptung: $\exists \epsilon > 0$: Zu jedem $x \in K \exists \lambda \in \Lambda$. $B_\epsilon(x) \subset \Omega_\lambda$.

$\epsilon > 0, x_0 \in K, \lambda_0 \in \Lambda. B_\epsilon(x_0) \subset \Omega_0$. Induktiv $\lambda_n \in \Lambda, x_n \in K$.

- Wähle $\lambda_n \in \Lambda : B_\epsilon(x_n) \subset \Omega_{\lambda_n}$
- Falls $K \setminus \bigcup_{k=0}^n \Omega_{\lambda_k} \neq \emptyset$, dann $x_{n+1} \in K \setminus \bigcup_{k=0}^n \Omega_{\lambda_k}$ dann breche den Algorithmus ab.

x_n, K folgenkompakt $\implies$ x_n hat einen HP in K.

$d(x_n, x_m) \geqslant \epsilon \forall m, n \in \mathbb{N} \implies$ Algorithmus muss abbrechen.

Insbesondere:

$$K \subset \bigcup_{k=0}^{n} \Omega_{\lambda_k}$$

Behauptung: Es gibt ein $\epsilon > 0$, sodass es zu jedem $x \in K$ ein $\lambda \in \Lambda$ gibt mit $B_\epsilon(x) \subset \Omega_\lambda$.

Beweis der Behauptung: Andernfalls gäbe es zu $e_n = \frac{1}{n}$ eine Folge $x_n \in K$, sodass $B_{\epsilon_n}(x_n) \not\subset \Omega_\lambda \forall \lambda \in \Lambda$. Da K folgenkompakt ist, gibt es eine Teilfolge x_{n_j} von x_n mit $x_{n_j} \to x^*$ für $j \to \infty$ für ein $x^* \in K$. Da $x^* \in K$ gibt es ein $\lambda_* \in \Lambda$ mit $x^* \in \Omega_{\lambda_*}$. Da Ω_{λ_*} offen ist, gibt es ein $\epsilon_* > 0$ mit $B_{\epsilon_*}(x_*) \subset \Omega_{\lambda_*}$. Da $x_{n_j} \to x^*$ gibt es ein $j_* \in \mathbb{N}$ mit $d(x_*, x_{n_j}) < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall j \geqslant j_*$.

Wir können o.B.d.A. j_* so groß wählen, dass $n_{j_*} > \frac{2}{\epsilon}$ und damit $\epsilon_{n_{j_*}} = \frac{1}{n_{j_*}} < \frac{\epsilon}{2}$. Damit gilt $B_{\epsilon_{n_{j_*}}}(x_{n_{j_*}}) \subset B_\epsilon(x_*)$. Nach Konstruktion gilt $B_\epsilon(x_*) \subset \Omega_{\lambda_*}$, aber $B_{\epsilon_{n_{j_*}}} \not\subset \Omega_\lambda \forall \lambda \in \lambda$. Das ist ein Widerspruch.

□

[1] Achtung, Mitschrift unsicher!

Satz 3.34. *Jede kompakte Menge ist abgeschlossen und beschränkt.*

Beweis. Sei K kompakt. Sei $x_n \in K$ eine konvergente Folge mit $x_n \to x$. Da K kompakt, gibt es eine gegen $y \in K$ konvergente Teilfolge. Aus der Eindeutigkeit des Limes folgt $x = y \in K$, d.h. K ist abgeschlossen nach Lemma 3.31.
Falls K unbeschränkt ist, dann gibt es eine Folge $x_n \in K$ mit

$$d(x_n, x_0) > n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dann hat x_n keinen Häufungspunkt, d.h. keine konvergente Teilfolge. Damit wäre K nicht kompakt. □

Satz 3.35 (Heine-Borel)**.** *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$. Dann sind äquivalent:*

(i) *K ist kompakt.*

(ii) *K ist abgeschlossen und Beschränkt*

Beweis. **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)** Aus Satz 3.34.

(ii) $\Longrightarrow$ **(i)** Sei K beschränkt und abgeschlossen. Nach Satz 3.17 gibt es zu jeder Folge $x_n \in K$ eine gegen $x \in \mathbb{R}^n$ konvergente Teilfolge. nach Lemma 3.31 gilt $x \in K$.

□

Lemma 3.36. *Sei X ein metrischer Raum, $E \subseteq X$. Dann sind äquivalent:*

(i) $x \in \partial E$

(ii) *Es gibt eine Folge $x_n \in E$ mit $x_n \to x$ und eine Folge $y_n \in E^c$ mit $y_n \to x$.*

Beweis. Folgt aus Lemma 2.54(??). □

4 Reihen

4.1 Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

Definition 4.1. Wir definieren die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ als die Menge $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ausgestattet mit der Addition $+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und komplexer Multiplikation $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \tag{141}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 x_y - y_1 y_2 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{pmatrix} \tag{142}$$

für $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$.
Notation nicht mit Skalarprodukt verwechseln!
Die komplexen Zahlen sind ein zweidimensionaler reeller, normierter Vektorraum mit der Euklidschen Norm

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{für } z = (x, y) \in \mathbb{C} \tag{143}$$

Für $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ heißt $\operatorname{Re} z := x$ **Realteil** von z und $\operatorname{Im} z := y$ **Imaginärteil** von z.
Zu $z = (x, y)$ ist die **komplex konjugierte** Zahl $\bar{z} = (x, -y)$.

Definition 4.2. Wir definieren

$$i := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{144}$$

Bemerkung 4.3. Eine Basis von $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch 1 und i, d.h. jede Zahl $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ lässt sich eindeutig in der Form

$$z = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

darstellen oder kurz

$$z = x + iy$$

Mit der Definition 4.2 haben wir $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0\} \subseteq \mathbb{C}$ als eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ identifiziert. Genauer ist

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad x \mapsto x + i \cdot 0$$

injektiv und es gilt

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \quad \forall \alpha, \beta, x, y \in \mathbb{R}$$

Die komplexe Multiplikation lässt sich einfacher wie folgt merken:

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 - y_2 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

wobei diese Gleichheut aus $i^2 = -1$ und dem Distributivgesetz in $\mathbb{C}$ folgt.

Satz 4.4. *$\mathbb{C}$ ist ein Körper mit Nullelement $0 = (0,0)$ und Einselement $1 = (1,0)$.*

Beweis. Übungszettel. □

Lemma 4.5. *Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:*

(i) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2}(z - \bar{z})$

(ii) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

(iii) $|\operatorname{Re} z| \leqslant |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \leqslant |z|$

(iv) Es gilt $\bar{z}z \in [0, \infty)$ und $|z| = \sqrt{\bar{z}z}$

(v) $|zw| = |z||w|$

Beweis. (i)-(iii) Übungszettel.
(iv) Für $z = x + iy$ gilt $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x + iy)(x - iy)} = \sqrt{\bar{z}z}$. □

Lemma 4.6. *Eine komplexe Zahlenfolge $z_n = x_n + iy_n$ konvergiert genau dann, wenn die Folgen x_n, y_n konvergieren. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + i \lim_{n\to\infty} y_n$.*

Beweis. Folgt aus Satz 3.16(??) mit $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ und Proposition 3.13(??). □

Die Motivation, $\mathbb{C}$ einzuführen, besteht darin, eine Lösung der Gleichung $z^2 = -1$ zu finden. In der Tat hat diese Gleichung zwei Lösungen in $\mathbb{C}$. Allgemeiner gilt:

Satz 4.7 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Jedes Polynom p n-ten Grades, d.h.*

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

mit $a_k \in \mathbb{C}$ für $k = 0, \ldots, n$ hat genau n Nullstellen.

Beweis. Erfolgt in Funktionentheorie-Vorlesung. □

4.2 Reihen: Definition und Grundlagen

Falls nicht anders angegeben, gilt in diesem Kapitel $a_k \in \mathbb{C}$.

Definition 4.8. Für eine komplexe Folge $a_n \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + \cdots + \mathfrak{a}_n$$

Eine Folge dieser Form heißt **Reihe**, s_n heißt **n-te Partialsumme**. Die Reihe wird auch mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

bezeichnet. Die Reihe heißt **konvergent**, falls die Folge der Partialsummen s_n konvergiert, sonst divergent. Der Grenzwert der Reihe ist definiert als der Grenzwert der Partialsummen und wird ebenfalls mit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bezeichnet.

Lemma 4.9. *Sei $\sum_{n=0}^{\infty}$ eine Reihe. Dann gilt:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \textit{ konvergent} \implies a_n \textit{ konvergiert gegen } 0$$

Beweis. Es gelte

$$s_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_k \to s^* \in \mathbb{C}$$

Dann folgt

$$a_n = s_{n+1} - s_n \to s^* - s^* = 0$$

□

Beispiel 4.10 (Geometrische Reihe)**.** Für $q \in \mathbb{C}$ ist die **geometrische Reihe** gegeben durch $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$. Für $|q| \geqslant 1$ divergiert die geometrische Reihe. Für $|q| < 1$ konvergiert sie und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

In der Tat, nach Lemma 4.9 divergiert $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ für $|q| \geqslant 1$, da q^n nicht gegen Null konvergiert. Für $|q| < 1$ setze $s_n := \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + \cdots + q^n$. Damit gilt

$$(1-q)s_n = s_n - qs_n = 1 - q^{n+1} \implies s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \to \frac{1}{1-q} \quad \text{für } n \to \infty$$

Beispiel 4.11. Die **harmonische Reihe** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.
In der Tat, mit $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ gilt $s_{2n} - s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum k = n + 1^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$, d.h. s_n divergiert.

Lemma 4.12. *Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei konvergente Reihen und seien $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Dann ist auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)$ konvergent und es gilt:*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

Beweis. Folgt aus Prop. 3.13[2] und Lemma **??**. □

Satz 4.13 (Cauchy-Kriterium für Reihen)**.** *Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist genau dann konvergent, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n^* \in \mathbb{N}$ gibt mit*

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \epsilon \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, n^* \leqslant m \leqslant n$$

Beweis. Für $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ gilt $s_n - s_m = \sum_{k=m+1}^{n} a_k$. Die Bedingung ist also äquivalent dazu, dass s_n eine Cauchyfolge ist. Außerdem ist $\mathbb{C}$ ein vollständiger metrischer Raum. □

[2]oder so ähnlich, an der Tafel stand Satz 3.16 aber das kann ich nicht zuordnen

4.3 Konvergenzkriterien

Definition 4.14. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt **absolut konvergent**, falls die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert. In diesem Fall benutzen wir die Notation

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$$

Satz 4.15. *Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.*

Beweis. Es gelte $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$ und sei $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$. Da $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$, gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $n^* \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=m}^{n} |a_k| < \epsilon \ \forall n^* \leqslant m \leqslant n$. Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \epsilon \ \forall m, n \in \mathbb{N}, \ n^* \leqslant m \leqslant n$$

Aus Satz 4.13 folgt, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent. □

Lemma 4.16 (Majorantenkriterium)**.** *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n, c_n \geqslant 0$ eine konvergente Reihe und es gelte $|a_n| \leqslant c_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.*

Beweis. Die Folge $s_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ ist monoton steigend und es gilt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k| \leqslant \sum_{k=0}^{n} c_k \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} c_k < \infty$$

Damit ist s_n monoton wachsend und beschränkt und konvergiert also. □

Lemma 4.17 (Wurzelkriterium)**.** *Sei a_n eine komplexe Folge. Falls* $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} < 1$, *dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.*

Beweis. Falls $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} < 1$, dann gibt es $q \in (0,1)$ und ein $n^* \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| < q^n \ \forall n \geqslant n^*$. Die absolute Konvergenz folgt dann aus Beispiel 4.10 und dem Majorantenkriterium. □

Lemma 4.18 (Quotientenkriterium). *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine komplexe Reihe mit $a_n \neq 0$.*

(i) Falls $\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergiert absolut.*

(ii) Falls $\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *divergiert.*

Beweis. (i) Insbesondere gibt es ein $q \in (0,1)$ und ein $n^* \in \mathbb{N}$, sodass $|a_{n+1}| \leqslant q|a_n| \ \forall n \geqslant n^*$. Mit vollständiger Induktion erhalten wir

$$|a_n| \leqslant q^{m-n^*}|a_{n*}| \ \forall n \geqslant n^*$$

Damit folgt die absolute Konvergenz aus Beispiel 4.10 und dem Majorantenkriterium.

(ii) Insbesondere gibt es ein $q > 1$ und ein $n^* \in \mathbb{N}$, sodass $|a_{n+1}| \geqslant q|a_n| \ \forall n \geqslant n^*$, d.h. a_n divergent. Damit divergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

□

Lemma 4.19 (Teleskopsumme). *Sei b_n eine komplexe Folge und sei $a_n = b_{n+i} - b_n$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn die Folge b_n konvergiert.*

Beweis. Übung. □

Definition 4.20. Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, a_n \in \mathbb{R}$, deren Folgeglieder alternierende Vorzeichen haben (d.h. $a_{n+1}a_n \leqslant 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$) heißt alternierende Reihe.

Lemma 4.21 (Leibniz). *Sei $a_n \geqslant 0$ eine monoton fallende Nullfolge. Dann kovnergiert $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$. Außerdem gilt*

$$\left|\sum_{n=0}^{n*}(-1)^n a_n - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n\right| \leqslant |a_{n*}| \quad \forall n^* \in \mathbb{N}. \tag{145}$$

Beweis. Sei $s_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$. Dann gilt:

$$s_{2n} = a_0 + \underbrace{(-a_1 + a_2)}_{\leqslant 0} + \cdots + \underbrace{(-a_{2n-1} + a_{2n})}_{\leqslant 0}$$

$$s_{2n+1} = \underbrace{(a_0 - a_1)}_{\geqslant 0} + \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geqslant 0} + \cdots + \underbrace{a_{2n} - a_{2n+1}}_{\geqslant 0}$$

Insbesondere gilt für $n \geqslant 1$:

$$a_0 \geqslant s_{2n} \geqslant s_{2n+2} \geqslant s_{2n+1} \geqslant s_{2n-1} \geqslant 0$$

d.h. die Folgen s_{2n}, s_{2n+1} sind monoton und beschränkt und daher kovnergent.
Da $|a_{2n+1}| = |s_{2n+1} - s_{2n}| \to 0$, folgt, dass $s_{2n+1} - s_{2n} \to 0$, d.h. $\exists s^* \in \mathbb{R}$ mit $s_{2n} \to s^*$, $s_{2n+1} \to s^*$. Damit folgt $s_n \to s^*$ für die gesamte Folge.
Außerdem gilt $|s_n - s^*| \leqslant |s_{n+1} - s_n| = |a_n|$. Daraus folgt (145). $\square$

Beispiel:

$$1 - \frac{1}{2}\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots$$

konvergiert

4.4 Umordnung von Reihen

Satz 4.22 (Umordnungssatz). *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe und sei $\Phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion. Dann ist auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\Phi(n)}$ absolut konvergent und es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\Phi(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Nach dem Majorantenkriterium sind die Reihen

$$\sum_n (\operatorname{Re} a_n)_+, \quad \sum_n (\operatorname{Re} a_n)_-, \quad \sum_n (\operatorname{Im} a_n)_+, \quad \sum_n (\operatorname{Im} a_n)_-$$

absolut konvergent, da $|\operatorname{Re} a_n|, |\operatorname{Im} a_n| \leqslant |a_n|$ und

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{Re} a_n)_+ - \sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{Re} a_n)_- + i \sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{Im} a_n)_+ - i \sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{Im} a_n)_-$$

Daher reicht es zu zeigen, dass für jede Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, a_n \in \mathbb{R}, a_n \geqslant 0$ der Umordnungssatz gilt, d.h. $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\Phi(n)}$ konvergiert und

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\Phi(n)}$$

Wir betrachten

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad t_n = \sum_{k=0}^{n} a_{\Phi(k)}$$

wobei nach Voraussetzung gilt $s_n \to s^*$ für ein $s^* \in \mathbb{R}$: Beide Folgen s_n, t_n sind monoton wachsend.
Da Φ bijektiv ist, gibt es zu $n \in \mathbb{N}$ ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $\{0, \dots, k\} \supset \{\Phi(0), \dots, \Phi(n)\}$. Dann gilt

$$t_n = \sum_{j=0}^{n} a_{\Phi(j)} \overset{!}{\leqslant} \sum_{j=0}^{k} a_j = s_k \leqslant s^* \tag{146}$$

Damit ist die Folge t_n monoton wachsend und nach oben beschränkt und damit konvergent, d.h. $t_n \to t^*$ für ein $t^* \in \mathbb{R}$. Aus (146) folgt auch, dass $t^* \leqslant s^*$. Analog gilt aber auch $s^* \leqslant t^*$, und daraus folgt $s^* = t^*$. □

Satz 4.23 (Umordnungssatz II – Riemann). *Sei a_n eine **reelle** Folge. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, aber nicht absolut konvergent. Dann exististiert zu jedem $\sigma \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine*

Bijektion $\Phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *mit*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\Phi(n)} = \sigma$$

Beweis. Mit

$$a_n^+ := \max\{a_n, 0\}, \quad a_n^- = \max\{-a_n, 0\}$$

d.h. $a_n = a_n^+ - a_n^-$ gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) \tag{147}$$

Schritt 1 Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ = \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n^- = \infty \tag{148}$$

In der Tat, falls beide Reihen in (148) konvergieren, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut, da $|a_n| = a_+ + a_-$. Falls genau eine der Reihen in (148) divergiert, dann divergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. In beiden Fällen ergibt sich ein Widerspruch zur Voraussetzung des Satzes. Damit folgt (148).

Schritt 2 Konstruktion von Φ

Seien

$$I_+ := \{n \in \mathbb{N}, a_n > 0\} \tag{149}$$

$$I_- := \{n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant 0\} \tag{150}$$

d.h. $\mathbb{N} = I_+ \cup I_-, I_+ \cap I_- = \varnothing$. Wir setzen $\Phi(0) = 0$ und für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$t_n = \sum_{j=0}^{n} a_{\Phi(j)}$$

$$\Phi(n+1) = \begin{cases} \min\{j \in I_+ : j \notin \Phi(\{0,\dots,n\})\} & \text{falls } t_n < \sigma \\ \min\{j \in I_- : j \notin \Phi(\{0,\dots,n\})\} & \text{falls } t_n \geqslant \sigma \end{cases} \tag{151}$$

Aus (148) folgt, dass die Mengen I_+, I_- unendlich sind. Insbesondere sind die Mengen auf der rechten Seite von (151) nicht leer. Damit ist Φ wohldefiniert.

Schritt 3 Φ ist bijektiv

In der Tat, aus der Definition (151) folgt direkt die Injektivität von Φ. Es bleibt zu zeigen, dass Φ surjektiv ist. Wir definieren

$$J_+ := \{n \in \mathbb{N}^*, t_{n-1} < \sigma\} \tag{152}$$

$$J_- := \{n \in \mathbb{N}^*, t_{n-1} \geqslant \sigma\} \tag{153}$$

Es reicht zu zeigen, dass J_+ und J_- beide unendliche Mengen sind. Wir zeigen, dass J_- unendlich ist, der Beweis für J_+ verläuft analog.

Wir argumentieren durch Widerspruch und nehmen an, dass J_+ endlich ist. Dann gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$, sodass

$$t_n < \sigma \quad \forall n \geqslant n_1 \tag{154}$$

Aus (151) folgt, dass für $n_2 \geqslant n_1$ gilt:

$$t_{n_2} = t_{n_1} + \sum_{n=n_1}^{n_2} a_{\Phi(n)} \tag{155}$$

$$t_{n_1} = \sum_{n=\Phi(n_1)}^{\Phi(n_2)} a_j^+ \tag{156}$$

Da Φ injektiv ist, gilt $\Phi(n_2) \to \infty$ für $n_2 \to \infty$. Im Limes $n_2 \to \infty$ erhalten wir also

$$t_{n_2} = t_{n_1} + \sum_{n=\Phi(n_1)}^{\Phi(n_2)} a_j^+ \overset{(148)}{\to} \infty$$

Dies ist ein Widerspruch zu (154). Damit gilt $\#J_- = \infty$ und genauso $\#J_+ = \infty$. Damit ist Φ bijektiv.

Schritt 4 Es gilt

$$t_n \to \sigma \qquad \text{für } n \to \infty$$

Sei W_+ die Menge der oberen „Wendepunkte“ und W_- die Menge der unteren „Wendepunkte“, d.h.

$$W^+ := \{n \in \mathbb{N}^* : t_{n-1} > \sigma \geqslant t_n\} \tag{157}$$

$$= \{n \in \mathbb{N}^* : n-1 \in J_+, n \in J_-\} \tag{158}$$

$$W^- := \{n \in \mathbb{N}^* : t_{n-1} < \sigma \leqslant t_n\} \tag{159}$$

Da J_-, J_+ unendlich sind, sind auch die Mengen W_-, W_+ unendlich. Da $\sum a_n$ konvergiert, gilt $a_n \to 0$. Zu $\epsilon > 0$ gibt es also ein $n^* \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| < \epsilon \ \forall n \geqslant n_*$. Da Φ surjektiv ist, gibt es zu n^* ein $N^* \geqslant n^*$ mit $\{0, \dots, n^*\} \subset \Phi(\{0, \dots, N^* - 1\})$, d.h. $\Phi(n) > n^* \ \forall n \geqslant N^*$.

Da W^+, W^- unbeschränkt sind, gibt es $N^+ \geqslant N^*$ mit $N^+ \in W^+$ und es gibt $N^- \geqslant N^*$ mit $N^- \in W^-$. Sei $M = \max\{N^-, N^+\}$. Aus der Definition (151) folgt

$$t_n < \sigma + \epsilon \quad \forall n \geqslant M \tag{160}$$

$$t_n \geqslant \sigma - \epsilon \quad \forall n \geqslant M \tag{161}$$

und daher

$$|t_n - \sigma| < \epsilon \quad n \geqslant M \tag{162}$$

d.h. $t_n \to \sigma$ für $n \to \infty$.

□

Bemerkung 4.24. Sei J eine abzählbare Menge und sei $a_j \in \mathbb{C}$ für $j \in J$. Falls eine Bijektion $\Phi\colon \mathbb{N} \to J$ existiert mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|a_{\Phi(n)}\right| < \infty$$

dann definieren wir

$$\sum_{j \in J} a_j := \sum_{n=0}^{\infty} a_{\Phi(n)}$$

Wir sagen auch, dass $a\colon J \to C$ **summierbar** ist und schreiben

$$\sum_{j \in J} |a_j| < \infty$$

5 Stetigkeit

5.1 Stetigkeit

Definition 5.1. Seien (X, d_x), (Y, d_y) metrische Räume und sei $E \subset X$.

(i) Eine Funktion $f\colon E \to Y$ heißt **stetig in** $x \in E$, falls die folgende Aussage gilt: Für jede Folge $x_n \in E$ mit $x_n \to x$ folgt $f(x_n) \to f(x)$.

(ii) Die Funktion heißt stetig in $F \subset E$, falls sie stetig in jedem Punkt $x \in F$ ist. Die Funktion $f\colon E \to X$ heißt **stetig**, falls sie stetig in ganz E ist.

Bemerkung 5.2. Ist $x \in E$ ein **isolierter Punkt** von E, d.h. $\exists\, \epsilon > 0$ mit $E \cap B_\epsilon(x) = \{x\}$, dann ist jede Funktion $f\colon E \to Y$ stetig in X. In der Tat, die einzige Folge $x_n \in E$ mit $x_n \to x$ ist dann die konstante Folge $x_n := x\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 5.3. (i) Die **Heavisidefunktion** $H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist stetig $\forall x \neq 0$ aber nicht stetig für $x = 0$.

(ii) Die **Dirichletfunktion**

$$f(x) \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist in keinem Punkt stetig.

In der Tat, sei $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ und sei $x_n \in \mathbb{Q}$ eine FOlge mit $x_n \to x$. Dann gilt $f(x_n) = 1 \overset{n\to\infty}{\to} 1 \neq f(x) = 0$. Umgekehrt lässt sich zu $x \in \mathbb{Q}$ eine Folge $x_n \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ finden mit $x_n \to x$.

Wir benutzen die folgende Notation: Für $f, g\colon E \to \mathbb{C}$ definieren wir $f + g\colon E \to \mathbb{C}$ punktweise, d.h. $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$. Analog sind die Funktionen $-f\colon E \to \mathbb{C}, fg\colon E \to \mathbb{C}, \frac{f}{g}\colon E\backslash g^{-1}(0) \to \mathbb{C}$ definiert.

Lemma 5.4. *Sei X ein metrischer Raum, $E \subset X$ und sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Falls $f, g\colon E \to \mathbb{K}$ in x stetig sind, dann sind auch die Funktionen $f + g, fg, -f$ stetig in x. Falls $g(x) \neq 0$ ist, dann ist auch $\frac{f}{g}$ stetig in x.*

Beweis. Sei $x_n \in E$ mit $x_n \to x$. Dann gilt $f(x_n) \to f(x), g(x_n) \to g(x)$, da f, g stetig in x sind. Aus Proposition 3.13 und Lemma **??** folgt, dass $(f+g)(x_n) = f(x_n)+g(x_n) \to f(x)+g(x) = (f + g)(x)$. Damit ist $f + g$ stetig in x. Die Stetigkeit von $fg, -f, \frac{f}{g}$ zeigt man analog. □

Lemma 5.5. *Sei X ein metrischer Raum, $E \subset X$.*

(i) Eine Funktion $f\colon E \to \mathbb{R}^d$ ist genau dann in $x \in E$ stetig, falls jede Komponente $f_1, \dots, f_d : E \to \mathbb{R}$ stetig ist, wobei $f = (f_1, \dots, f_d)$.

(ii) Falls $f, g\colon E \to \mathbb{R}^d$ stetig sind, dann sind auch die Funktionen $f + g, -f$ stetig in x.

(iii) Falls $f\colon E \to \mathbb{R}^d, \lambda\colon E \to \mathbb{R}$ stetig in $x \in E$ sind, dann ist auch λf stetig in x.

Beweis. Folgt aus der Definition der Stetigkeit und Charakterisierung der Konvergenz in $\mathbb{R}^d$, siehe 3.16. □

Lemma 5.6. *Seien $(X, d_x), (Y, d_y), (Z, d_z)$ metrische Räume. Falls $f\colon X \to Y$ stetig in $x \in X$ ist und $g\colon f(X) \to Z$ stetig in $y = f(x)$ ist, dann ist $h = g \circ f : x \to z$ stetig in x.*

Beweis. Sei $x_n \in X$ eine Folge mit $x_n \to x$. Da f stetig in x ist, gilt $f(x_n) \to f(x) = y$ für $n \to \infty$. Da g stetig in y ist gilt $h(x_n) = g(f(x_n)) \to g(y) = g(f(x)) = h(x)$ für $n \to \infty$. Damit ist h stetig in x. □

Lemma 5.7. *Polynome, d.h. Funktionen der Form* $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j,\ n \in \mathbb{N}, a_j \in \mathbb{R}$ *oder* $a_j \in \mathbb{C}$ *und* $x \in \mathbb{R}$ *oder* $x \in \mathbb{C}$ *sind stetig.*

Beweis. Übung. □

Satz 5.8. *Seien* $(X, d_x), (Y, d_y)$ *metrische Räume,* $E \subset X$ *und sei* $f\colon E \to Y$*. Sei* $x \in E$*. Dann sind äquivalent:*

(i) f *ist stetig in* x*.*

(ii) Für jede offene Umgebung V *von* $y = f(x)$ *existiert eine offene Überdeckung* $U \subset X$ *von* x *mit*
$$f(U \cap E) \subset V$$

(iii) $\forall \epsilon > 0 \exists \delta(x)$*, sodass* $\forall \tilde{x} \in \mathbb{R}$ *mit* $|x - \tilde{x}| < \delta$ *gilt* $f(x) - f(\tilde{x}) < \epsilon$*.*

Beweis. **(i) $\Longrightarrow$ (ii)** Angenommen, (ii) gilt nicht. Dann gibt es eine offene Umgebung V von $y = f(x)$, sodass die Aussage (ii) nicht gilt. Das heißt, es gibt keine offene Umgebung U von x, sodass $f(U \cap E) \subset V$. Insbesondere gibt es in jeder offenen Umgebung $B_{\frac{1}{n}}(x)$ einen Punkt $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x)$ mit $f(x_n) \notin V$. Insbesondere gilt $x_n \to x$ aber $f(x_n)$ konvergiert nicht gegen $y = f(x)$. Damit ist f nicht stetig in x, d.h. (i) gilt nicht.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Sei $\epsilon > 0$ fest. Dann ist $V := B_\epsilon(y)$ eine offene Umgebung von y. Aus (ii) folgt, dass es eine offene Umgebung U von x gibt mit $f(U \cap E) \subset V$. Da $x \in U, U$ offen, gibt es ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(x) \subset U$ und insbesondere $f(B_\delta(x) \cap E) \subset V$, d.h.
$$f(B_\delta(x) \cap E) \subset B_\epsilon(y)$$
Dies bedeutet, dass für jedes $\tilde{x} \in E$ mit $d_x(x, \tilde{x}) < \delta$ gilt: $d_y(f(\tilde{x}), f(x)) < \epsilon$, d.h. (iii) gilt.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Sei x_n eine Folge mit $x_n \to x$ für $n \to \infty$. Sei $\epsilon > 0$. Aus (iii) folgt, dass es ein $\delta > 0$ gibt mit
$$d_y(f(x), f(\tilde{x})) < \epsilon \quad \forall \tilde{x} \in E \text{ mit } d_x(x, \tilde{x}) < \delta \tag{163}$$
Da $x_n \to x$ gibt es ein $n^* \in \mathbb{N}$, sodass $d_x(x_n, x) < \delta\ \forall n \geqslant n^*$. Aus (163) folgt, dass $d_y(f(x), f(x_n)) < \epsilon\ \forall n \geqslant n^*$, d.h. $f(x_n) \to f(x)$ für $n \to \infty$. Daraus folgt (i).

□

Bemerkung 5.9. Die Bedingung $d_y(f(x), f(\tilde{x})) < \epsilon \quad \forall \tilde{x} \in E$ mit $d_x(x, \tilde{x}) < \delta$ kann auch in der Form
$$f(B_\delta(x) \cap E) \subset B_\epsilon(f(x))$$

geschrieben werden. Das ϵ/δ-Kriterium (ii) wird auch zur Definition der Stetigkeit benutzt.

Satz 5.10. *Seien $(X, d_x), Y(d_y)$ metrische Räume, $f: X \to Y$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) f ist stetig

(ii) f^{-1} ist offen für jede offene Menge $\Omega \subset Y$.

Beweis. **(i) $\implies$ (ii)** Sei also f stetig und sei $\Omega \subset Y$ offen. Sei $x \in f^{-1}(\Omega)$, d.h. $y := f(x) \in \Omega$. Da Ω offen ist, gibt es ein $\epsilon > 0$, sodass $B_\epsilon(y) \subset \Omega$. Da f stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(y) \subset \Omega$. Es folgt, dass $B_\delta(x) \subset f^{-1}(\Omega)$. Da $x \in f^{-1}(\Omega)$ beliebig gewählt war, folgt: $f^{-1}(\Omega)$ ist offen.

(ii) $\implies$ (i) Sei $x \in X$. Nach Satz 5.8(ii) reicht es zu zeigen, dass für jede offene Umgebung von $y := f(x)$ eine offene Umgebung U von x existiert mit $f(U) \subset V$. Das folgt gerade aus (ii).

□

Lemma 5.11. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist d stetig in jeder der beiden Variablen, d.h. für festes $p \in X$ sind die Funktionden $d(\cdot, p)$ und $d(p, \cdot)$ stetig.*

Beweis. Da $d(x, y) = d(y, x)$ reicht es zu zeigen, dass $f: X \to [0, \infty), f(x) = d(x, p)$ stetig ist. Für alle $x, y, z \in X$ gilt die „Umgekehrte Dreiecksungleichung“:

$$|d(z, y) - d(x, y)| \leqslant d(z, x) \tag{164}$$

In der Tat, wir können o.B.d.A. annehmen, dass $d(z, y) \geqslant d(x, y)$. Dann ist (164) äquivalent zur Dreiecksungleichung. Damit gilt (164).
Sei nun $x \in X$. Zu $\epsilon > 0$ wähle $\delta := \epsilon$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= |d(y, p) - d(x, p)| && (165) \\ &\leqslant d(x, y) < \epsilon \quad \forall y \in B_\delta(x) && (166) \end{aligned}$$

Damit ist f stetig. □

5.2 Grenzwerte von Funktionen

Beispiel 5.12. Betrachte $f: (0, 1) \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$. Obwohl $f(0)$ nicht definiert ist, erwarten wir, dass der Grenzwert von f an der Stelle $x = 0$ existiert und $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

Definition 5.13. Sei X metrischer Raum $E \subset X$. Ein Punkt $x^* \in X$ heißt **Häufungspunkt von E** falls eine Folge $x_n \in E \backslash \{x^*\}$ existiert mit $x_n \to x^*$.

Bemerkung 5.14. Man sieht leicht, dass x^* genau dann HP von E ist, wenn $E \cap (B_\epsilon(x) \backslash \{x\}) \neq \emptyset$ für alle $\epsilon > 0$.
Wir nennen $B_\epsilon(x^*) \backslash \{x^*\}$ **punktierte** offene ϵ-Kugel im x^*.

Beispiel 5.15. (i) Sei $E = B_1(0) \backslash \{0\} \subset \mathbb{R}^d$. Dann ist $0 \notin E$, aber 0 ist HP von E. Sei $F = \{0\} \subseteq \mathbb{R}^d$. Dann ist $0 \in F$, aber 0 ist kein HP von F.

(ii) Jeder Punkt $x \in \mathbb{R}$ ist Häufungspunkt von $\mathbb{R}$ und auch von $\mathbb{Q}$.

Definition 5.16. Seien X, Y metrische Räume, $E \subset X$ und sei $x^* \in X$ HP von E. Falls $f(x_n) \to y^* \in Y$ für alle Folgen $x_n \in E \backslash \{x^*\}, x_n \to x^*$, dann schreiben wir:

$$\lim_{x \to x^*} f(x) = y^*$$

Bemerkung 5.17. Die üblichen Rechenregeln für Grenzwerte gelten auch für $\lim_{x \to x^*} f(x)$. Insbesondere ist der Grenzwert eindeutig, die Grenzwerte von Summen sind die Summen der Grenzwerte (falls existent), etc.

Proposition 5.18. *Sei X, y metrischer Raum, $E \subset X, f: E \to Y$ und sei $x^* \in X$ ein Häufungspunkt von E. Dann ist f genau dann stetig in x^*, falls $\lim_{x \to x^*} f(x)$ existiert und $\lim_{x \to x^*} f(x) = f(x^*)$.*

Beispiel 5.19. Betrachte $f: [0, 1) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in (0, 1) \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Dann gilt $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$, d.h. f ist nicht stetig an $x = 0$.

Definition 5.20. Sei $E \subset \mathbb{R}$, Y metrischer Raum, $f\colon E \to Y$.

(i) Sei x^* ein HP von $E \cap (-\infty, x^*)$. Dann schreiben wir

$$\lim_{x \nearrow x^*} f(x) = \lim_{x \to (x^*)_-} f(x) = y^*$$

falls $f(x_n) \to y^*$ konvergiert für jede Folge $x_n \in E \cap (-\infty, x^*)$ mit $x_n \to x^*$. Dieser Grenzwert heißt **linksseitiger Grenzwert**.

(ii) Der rechtsseitige Grenzwert ist analog definiert mit (x^*, ∞).

Bemerkung 5.21. Sei $x_n \in \mathbb{R}$ eine Folge. Die Notation $x_n \nearrow x$ bedeutet, dass x_n monoton steigt und $x_n \to x$ für $n \to \infty$.

Lemma 5.22. *Sei $f\colon E \to \mathbb{R}$, $E \subset R$ und sei x^* HP der Mengen $E \cap (-\infty, x^*)$, $E \cap (x^*, \infty)$. Dann ist f genau dann stetig in x^* falls $\lim_{x \nearrow x^*} f(x)$, $\lim_{x \searrow x^*} f(x)$ existieren und*

$$f(x^*) = \lim_{x \nearrow x^*} f(x) = \lim_{x \searrow x^*} f(x)$$

5.3 Stetige Funktionen auf kompakten Mengen

Satz 5.23. *Seien X, Y metrische Räume, $K \subset X$ kompakt, $f\colon K \to Y$ stetig. Dann ist $f(K)$ kompakt.*

Beweis. Sei $y_n \in f(K)$ eine Folge. Dann gibt es eine Folge x_n mit $y_n = f(x_n)$. Da K kompakt ist, gibt es eine Teilfolge x_{n_j} von x_n und ein $x^* \in K$ mit $x_{n_j} \to x^*$ für $j \to \infty$. Da f stetig ist, erhalten wir $y_{n_j} = f(x_{n_j}) \to f(x^*) \in f(K)$. Damit ist $f(K)$ folgenkompakt und daher kompakt. □

Die beiden Voraussetzungen K kompakt, f stetig sind (für den Satz) notwendig. Betrachte z.B.: $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$. Dann ist $(0,1)$ nicht kompakt, f stetig auf $(0,1)$ und $f((0,1)) = (1,\infty)$ nicht kompakt. Die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ist auf der kompakten Menge $[0,1]$ definiert, aber nicht stetig. $f([0,1])$ ist nicht kompakt.

Satz 5.24. *Sei X ein metrischer Raum, $K \subset X$ kompakt, $f\colon K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f sein Maximum und Minimum an, d.h. $\exists x_{min}, x_{max} \in K$ mit*

$$f(x_{min}) = \min_{x \in K} f(x), \quad f(x_{max}) = \max_{x \in K} f(x)$$

Beweis. Wir setzen $m := \inf f(K), M := \sup f(K)$. Nach Definition von Supremum, Infimum gibt es Folgen $x_n, y_n \in K$ mit $f(x_n) \to m, f(y_n) \to M$ für $n \to \infty$. Da K kompakt ist, gibt es Teilfolgen x_{n_j}, y_{n_j} der Folgen x_n, y_n und $x_{min}, x_{max} \in K$ mit $x_{n_j} \to x_{min}, y_{n_j} \to x_{max}$ für $j \to \infty$. Da f stetig ist, gilt $f(y_j) \to f(x_{min})$, $f(x_j) \to f(x_{max})$ für $j \to \infty$. Da der Limes eindeutig ist, folgt $f(x_{min}) = m, f(x_{max}) = M$. Insbesondere $m, M \in f(K)$. □

Satz 5.26. *Seien $(X, d_x), (Y, d_y)$ metrische Räume, $E \subset X, f\colon E \to Y$. Dann heißt f* ***gleichmäßig stetig auf*** *E, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ existiert mit*

$$d_y(f(x), f(y)) < \epsilon \quad \forall x, y, \in E,\ d_x(x, y) < \delta$$

Bemerkung 5.27. Eine Funktion $f\colon E \to Y$ heißt stetig in E, falls zu jedem $x \in E, \epsilon > 0$ ein $\delta = \delta(x, \epsilon) > 0$ existiert, sodass

$$d_y(f(x), f(y)) < \epsilon \quad \forall y \in E,\ d_x(x, y) < \delta$$

Von der Stetigkeit zur gleichmäßigen Stetigkeit hat sich also die „Reihenfolge der Forderungen“ verändert: Für die Stetigkeit fordern wir $\forall x \forall \epsilon \exists \delta$, für die gleichmäßige Stetigkeit $\forall \epsilon \exists \delta \forall x$

Definition 5.28. Seien $(X, d_x), (Y, d_y)$ metrische Räume, $E \subset X, f\colon E \to Y$. Dann heißt f **lipschitzstetig auf** E, falls es ein $L > 0$ gibt mit

$$d_y(f(x), f(y)) \leqslant L d_x(x, y)$$

L heißt dann **Lipschitzkonstante** von f.

Proposition 5.29. *Jede lipschitzstetige Funktion ist gleichmäßig stetig.*
Jede gleichmäßig stetige Funktion ist stetig.

Beweis. Sei f lipschitzstetig, dann gilt

$$d_y(f(x), f(y)) \leqslant L d_x(x, y) \tag{167}$$

$$\leqslant \epsilon \quad \forall x, y : d_x(x, y) \leqslant \delta := \frac{\epsilon}{L} \tag{168}$$

und für jedes $\epsilon > 0$. Insbesondere ist f gleichmäßig stetig. □

Satz 5.30. *Seien $(X, d_x), (Y, d_y)$ metrische Räume. Sei $K \subset X$ kompakt und sei $f\colon K \to Y$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.*

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ fest. Da f stetig ist, gibt es zu jedem $x \in K$ ein $\delta(x)$, sodass

$$d_y(f(x), f(y)) < \epsilon \quad \forall y \in K, d_x(x, y) < \delta(x) \tag{169}$$

Die Familie der Mengen $\Omega_x, x \in K$ mit $\Omega_x = B_{\frac{1}{2}\delta(x)}(x)$ bilden eine offene Überdeckung von K. In der Tat, es gilt $K \subset \bigcup_{x \in K} \Omega_x, \Omega_x$ offen. Da K kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung, d.h. es gibt ein $N \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_N \in K$, sodass

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_{\frac{\delta_i}{2}}(x_i) \tag{170}$$

, wobei $\delta_i := \delta(x_i)$. Wir definieren $\delta := \min\{\delta_1, \ldots, \delta_N\} > 0$. Seien $x, y \in K$ mit $d_x(x, y) < \frac{\delta}{2}$. Zu x gibt es nach (170) ein $i \in \{1, \ldots, N\}$ mir $x \in B_{\frac{\delta_i}{2}}(x_i)$. Es gilt $d_x(x, y) \leqslant d_x(x_i, x) + d_x(x, y) < \frac{\delta_i}{2} + \frac{\delta_i}{2} \leqslant \delta_i$, d.h. $y \in B_{\delta_i}(x_i)$. Aus (169) folgt $d(f(x), f(y)) < \epsilon$. Da $x, y \in K$ als beliebige Punket mit $d_x(x, y) < \frac{\delta}{2}$ gewählt waren, erhalten wir $d_y(f(x), f(y)) < \epsilon\ \forall x, y \in K$ mit $d_x(x, y) < \frac{\delta}{2}$, d.h. f ist gleichmäßig stetig. □

Definition 5.31. Sei $q = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*$. Wir definieren

$$x^q := (x^m)^{\frac{1}{n}} \quad \forall x \in [0, \infty)$$

Die Definition ist konsistent, d.h. falls $q = \frac{m}{n} = \frac{km}{kn}$ für $k \in \mathbb{N}^*$, dann folgt aus den Rechenregeln für Wurzel und Potenz, dass $(x^{km})^{\frac{1}{kn}} = (x^m)^{\frac{1}{n}}$.

Proposition 5.32. *Sei $x \in \mathbb{R} \cap [0, \infty)$. Die Funktion $f\colon \mathbb{Q} \cap [0, \infty) \to [0, \infty), f(q) = x^q$ ist gleichmäßig stetig in $[R_1, R_2] \cap \mathbb{Q}$ für alle $R_1, R_2 > 0$. Insbesondere gibt es eine eindeutige stetige Fortsetzung $\bar{f}\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$, d.h. $\bar{f}$ ist stetig und es gilt $\bar{f}(x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$.*

Satz 5.33 (Zwischenwertsatz)**.** *Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $a \leqslant b$ stetig. Dann gibt es zu jedem y^* zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ein $x^* \in [a, b]$ mit $f(x^*) = y^*$.*

Beweis. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $f(a) \leqslant f(b)$ ist, sonst betrachte $g = -f$. Wir können weiterhin annehmen, dass $f(a) < y^* < f(b)$, da die Aussage sonst trivial ist. Wir definieren

$$E := \{x \in [a, b] : f(x) > y^*\}$$

und

$$x^* := \inf E \in [a, b]$$

Da $f(a) < y^* < f(b)$ und da f stetig ist, folgt $x^* \in (a, b)$. Nach Definition des Infimums gibt es eine Folge $x_n \in E$ mit $x_n \to x^*$.
Da $f(x_n) > y^* \ \forall n \in \mathbb{N}$ und da f stetig ist, gilt

$$f(x_n) \to f(x_*) \geqslant y^*$$

Da $E = f^{-1}((y^*, \infty))$ das Urbild einer offenen Menge ist und da f stetig ist, ist E offen in $[a, b]$. Insbesondere gilt $x^* = \inf E \notin E$. Es folgt $f(x^*) \leqslant y^*$.
Damit erhalten wir $f(x^*) = y^*$. □

Korollar 5.34. *Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und monoton. Dann gilt:*

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)]$$

Definition 5.35. Sei $E \subset \mathbb{R}, f\colon E \to \mathbb{R}$. Dann heißt f

(i) monoton steigend, falls $f(x) \leqslant f(y) \ \forall x, y \in E, x < y$.

(ii) strikt monoton steigend, falls $f(x) < f(y) \quad \forall x, y \in E, x < y$.

(iii) (strikt) monoton fallend, falls $-f$ (strikt) monoton steigend ist.

(iv) (strikt) monoton, falls f (strikt) monoton steigend oder fallend ist.

5.4 Konvergenz von Funktionenfolgen

Definition 5.36. Seien X, Y Mengen, $E \subset X$ sei $f_n\colon E \to Y$ eine Folge von Funktionen, sei $f\colon E \to Y$. Wir sagen, f_n **konvergiert punktweise in E** gegen f, falls

$$f_n(x) \to f(x) \quad \forall x \in E$$

Beispiel 5.37. Betrachte die Folge $f_n(x) = x^n, f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Die Folge f_n konvergiert punktweise gegen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$. Beachte: Die Funktionen f_n sind stetig, nicht aber f.

Definition 5.38. Sei X eine Menge, $E \subset X$, Y ein normierter Raum. Die Folge $f_n\colon E \to Y$ **konvergiert gleichmäßig in E** gegen $f\colon E \to Y$, falls für alle $\epsilon > 0$ ein $n^* \in \mathbb{N}$ existiert mit $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon\ \forall n \geqslant n^*, \forall x \in E$.
Notation: $f_n \rightrightarrows f$.

Bemerkung 5.39. Bei punktweiser Konvergenz darf $n^* = n^*(x,\epsilon)$ auch von x abhängen, bei gleichmäßiger Konvergenz hängt $n^* = n^*(\epsilon)$ nicht von x ab. Insbesondere folgt aus gleichmäßiger Konvergenz die punktweise Konvergenz.

$$f_n \rightrightarrows f \text{ in } E \implies f_n(x) \to f(x)\ \forall x \in E$$

Beispiel 5.40. Die Folge $f_n(x) = x^n$ konvergiert gleichmäßig in $[0, \frac{1}{2}]$ gegen $f\colon [0,\frac{1}{2}] \to \mathbb{R}, f = 0$.
In der Tat, sei $\epsilon > 0$. Dann existiert ein $n^* \in \mathbb{N}$ mit $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \epsilon\ \forall n \geqslant n^*$. Dann gilt $x^n < \epsilon\ \forall n \geqslant n^*, 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$. Damit gilt $f_n \rightrightarrows f$ in $[0,\frac{1}{2}]$.

Satz 5.41. *Sei X ein metrischer Raum, Y ein normierter. $E \subset X$. Sei $f_n\colon E \to X$ eine Folge von stetigen Funktionen $f\colon E \to X$. Falls die Folge f_n gleichmäßig gegen f konvergiert, d.h. $f_n \rightrightarrows f$, dann ist f stetig.*

Beweis. Sei $x^* \in E, \epsilon > 0$. Dann existiert ein $n^* \in \mathbb{N}$, sodass

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}\ \forall n \geqslant n^*, x \in E$$

Da f_{n*} stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, sodass

$$|f_n(x) - f_n(x^*)| < \frac{\epsilon}{3}\ \forall x \in E, d(x,x^*) < \delta$$

Damit gilt $\forall n \geqslant n^*, x \in E, d(x,x^*) < \delta, |f(x) - f(x^*)| \leqslant |f(x) - f_{n*}(x)| + |f(x^*) - f_{n*}(x^*)| + |f_{n*}(x) - f_{n*}(x^*)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$, d.h. f ist stetig an x^*. □

Definition 5.42. Sei X metrischer Raum, $E \subset X$, Y normierter Raum.

(i) Eine Funktion $f\colon E \to Y$ heißt **beschränkt**, falls $f(E)$ beschränkt ist. Wir definieren den Raum der beschränkten Funktionen

$$B(X,Y) := \{f : X \to Y : f \text{ beschränkt}\}$$

mit Norm

$$\|f\|_{sup} := \|f\|_{B(X,Y)} = \sup_{x\in X} |f(x)|$$

(ii) Wir definieren den Raum der beschränkten stetigen Funktionen $C_b^0(X,Y) \subset B(C,Y)$ durch

$$C_b^0(X,Y) := \{f\colon X \to Y | f \text{ beschränkt, stetig }\}$$

Auf dem Raum $C_b^0(X,Y)$ verwenden wir die Norm $\|f\|_{C_b^0(X,Y)} := \|f\|_{B(X,Y)}$.

Falls $Y = \mathbb{R}$, dann schreiben wir auch $B(X) := B(X,\mathbb{R}), C_b^0(X) := C_b^0(X,\mathbb{R})$.

Proposition 5.43. *Sei X ein metrischer Raum, $E \subset X, Y$ normierter Raum, $f_n\colon E \to Y$ eine Folge von beschränkten Funktionen $f\colon E \to Y$. Dann gilt $f_n \rightrightarrows f$ genau dann, wenn $\forall \epsilon > 0$ ein $n^* \in \mathbb{N}$ existiert, sodass*

$$\|f_n - f\|_{sup} < \epsilon \quad \forall n \geqslant n^*$$

Proposition 5.44 (Cauchy-Kriterium)**.** *Sei X metrischer Raum, $E \subset X$, Y ein vollständiger normierter Raum. Sei $f_n\colon E \to Y$ eine Folge von beschränkten Funktionen $f\colon E \to Y$ beschränkt. Dann konvergiert $f_n \rightrightarrows f$ genau dann, falls für alle $\epsilon > 0$ ein $n^* \in \mathbb{N}$ existiert, sodass*

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon \quad m,n \geqslant n^* \forall x \in E \tag{171}$$

Bemerkung 5.45. Aus Proposition 5.44 sieht man, dass $B(X,Y), C_b^0(X,Y)$ vollständige metrische Räume sind, falls Y vollständig ist.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Da wir die gleichmäßige Konvergenz als „Normkonvergenz“ identifiziert haben, ist nach Lemma 3.26(?) jede gleichmäßig konvergente Folge eine Cauchyfolge im Sinne von (171).

„$\Leftarrow$“ Aus (171) folgt, dass $f_n(x) \in Y$ eine Cauchyfolge in Y ist $\forall x \in E$. Da Y vollständig ist, konvergiert $f_n(x) \forall x \in E$. Wir setzen $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Insbesondere gilt $f_n(x) \to f(x)$ punktweise. Zu $\epsilon > 0$ gibt es ein $n^* \in \mathbb{N}$, sodass (171) gilt, d.h.

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon \quad \forall m, n \geqslant n^* \; \forall x \in E \tag{172}$$

Im Limes $m \to \infty$ folgt, dass

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \epsilon < 2\epsilon \quad \forall n \geqslant n^* \; \forall x \in E$$

d.h. $f_n \rightrightarrows f$.

□

Satz 5.46. *Sei X metrischer Raum, $E \subset X$, Y normierter Raum, $f_n\colon E \to Y$. Es existiere eine Folge $x_n > 0$, sodass $\sum_{n=0}^{\infty} x_n < \infty$ und sodass $f_n(x) \leqslant c_n \; \forall x \in E$. Dann gibt es eine Funktion $f\colon E \to Y$, sodass*

(i) $f_n \rightrightarrows f$

(ii) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ konvergiert absolut gegen $f(x) \forall x \in E$.

Beweis. Sei $s_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$. Da $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty$, gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $n^* \in \mathbb{N}$, sodass

$$|s_m(x) - s_n(x)| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} c_k < \epsilon \quad \forall n^* \leqslant m \leqslant n \; \forall x \in E$$

Aus Proposition 5.44 folgt, dass $s_n \rightrightarrows f$ für ein $f\colon E \to Y$. Die absolute Konvergenz folgt aus dem Majorantenkriterium in Lemma 4.16(?). □

6 Potenzreihen

6.1 Einführung

Potenzreihen sind Funktionenreihen der Form

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad a_n, z, z_0 \in \mathbb{C}$$

Die Konstante $z_0 \in \mathbb{C}$ heißt Mittelpunkt der Potenzreihe.
Die Funktionen $a_n z^n$ sind stetig. f ist definiert als Funktion $f\colon E \to \mathbb{C}$, wobei E die Menge beschreibt, sodass die Potenzreihe konvergiert.

Satz 6.1. *Zu einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ definieren wir den* ***Konvergenzradius*** *R durch*

$$R := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}} \in [0,\infty]$$

Dann gelten die folgenden Aussagen:

(i) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$.

(ii) Die Reihe $\sum_n a_n z^n$ divergiert $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$.

(iii) Die Reihe $\sum_n a_n z^n$ konvergiert gleichmäßig in $\overline{B_r(0)} \forall r < R$. Insbesondere ist $f(z) := \sum_n a_n z^n$ stetig in $B_R(o)$.

Beweis. (i) Sei $|z| < R$. Aus der Definition von R erhalten wir

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n z^n|^{\frac{1}{n}} = |z| \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} < 1$$

Aus dem Wurzelkriterium folgt, dass die Reihe absolut konvergiert $\forall |z| < R$.

(ii) Aus der Definition von R erhalten wir für $|z| > R$

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n z^n|^{\frac{1}{n}} = |z| \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} > 1$$

Insbesondere gilt nicht $a_n z^n \to 0$. Daher divergiert die Reihe $\sum_n a_n z^n$ für $|z| > R$.

(iii) Sei $r < R$. Aus (i) folgt, dass die Reihe $\sum_{n=}^{\infty} c_n,\ c_n := |a_n| r^n$ konvergiert. Für $|z| \leqslant r$ gilt $|a_n z^n| \leqslant c_n$. Die gleichmäßige Konvergenz folgt aus dem Majorantenkriterium in Satz 5.46.

□

Bemerkung 6.2. (i) Falls $R = \infty$, dann konvergiert die Potenzreihe $\forall z \in \mathbb{C}$.

(ii) Falls $R = 0$, dann konvergiert $\sum a_n z^n$ nur für $z = 0$.

(iii) Falls $0 < R < \infty$, dann gibt der Satz 6.1 keine Aussage über die Konvergenz von $\sum a_n z^n$ für $z \in \partial B_R(0)$.

Lemma 6.3. *Sei a_n eine komplexe Folge, sodass der Limes*

$$R := \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \in [0,\infty] \tag{173}$$

existiert. Dann ist R der Konvergenzradius der Reihe $\sum_n a_n z^n$.

Beweis. Folgt aus dem Quotientenkriterium. In der Tat, aus (173) folgt für $z \neq 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n} = |z| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|z|}{R}$$

Aus dem Quotientenkriterium folgt, dass die Reihe $\sum a_n z^n$ absolut konvergiert für $|z| < R$ und divergiert für $|z| > R$. Die Aussage folgt aus Satz 6.1. □

Beispiel 6.4.

1. Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ hat Konvergenzradius $R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 1$, d.h. die Reihe konvergiert $\forall |z| < 1$ und divergiert $\forall |z| > 1$. Für $|z| = 1$ ist z^n keine Nullfolge, d.h. $\sum a_n z^n$ divergiert $\forall |z| = 1$.

2. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ hat Konvergenzradius $R = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

   Für $z = 1$ erhalten wir die divergierende harmonische Reihe. Für $z = -1$ die alternierende harmonische Reihe, welche konvergiert.

3. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ hat Konvergenzradius $R = 1$. Die Reihe konvergiert $\forall z \in \mathbb{C}, |z| = 1$.

4. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ hat Konvergenzradius $R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \infty$, d.h. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konvergiert $\forall z \in \mathbb{C}$.

6.2 Exponentialfunktion, Logarithmus, Potenz

Definition 6.5. Die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Die **Euler'sche Zahl** e ist definirt durch $e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

Satz 6.6. *Die Reihen $\sum_n a_n, \sum_n b_n$ seien absolut konvergent.*
Dann ist die Reihe $\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_n b_m$ summierbar und

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_n b_m = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m\right) \tag{174}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right) \tag{175}$$

Beweis. Aus $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty, \sum_{m=0}^{\infty} |b_m| < \infty$ folgt, dass

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} |a_n b_m| = \sum_{n=0}^{N} |a_n| \sum_{m=0}^{N} |b_m| < C \tag{176}$$

wobei die Konstante $C > 0$ nicht von N abhängt. Aus (176) folgt, dass es eine Abzählung von $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ gibt, sodass die Reihe absolut konvergiert. Die Reihe $\sum_{m,n\in\mathbb{N}^2} a_n b_m$ ist also summierbar. Wir definieren

$$S := \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_n b_m, A := \sum_{n=0}^{\infty} a_n, B := \sum_{m=0}^{\infty} b_m \tag{177}$$

Aus der Summierbarkeit erhalten wir

$$S = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$$

Es bleibt zu zeigen, dass $S = AB$. Da $\sum a_m b_n$ summierbar ist, gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| S - \sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \right| \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} |a - j||b_{k-j}| < \epsilon$$

Insbesondere,

$$\left| AB - \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} a_n b_m \right| < \epsilon \tag{178}$$

Daraus folgt

$$|S - AB| \overset{(\textbf{??}),(178)}{<} 2\epsilon + \left| \sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{K} a - j b_{k-j} - \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} a_n b_m \right| \tag{179}$$

$$< 3\epsilon \quad \forall \epsilon > 0 \tag{180}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig ist, folgt $S = AB$. □

Lemma 6.7. *Die Exponentialfunktion* $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *ist stetig. Es gilt* $\exp(0) = 1, \exp(1) = e$. *Weiterhin gilt* $\forall z, w \in \mathbb{C}$:

(i) $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$

(ii) $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$

Beweis. (i)

$$\exp(z)\exp(w) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!}\right) \tag{181}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} \frac{z^{k-j}w^j}{(k-j)!j!} \tag{182}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} z^{k-j}w^j \tag{183}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(z+w)^k = \exp(z+w) \tag{184}$$

(ii) $1 = \exp 0 = \exp(z - z) = \exp(z)\exp(-z)$, d.h. $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$

□

Lemma 6.8. *(i) Für* $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $\exp(x) \in (0, \infty)$. *Die Funktion* $\exp\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ *ist streng monoton wachsend und bijektiv.*

(ii) Für jedes $\alpha > 0$ *gilt*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\exp x}{x^\alpha} = \infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} (-x)^\alpha \exp(x) = 0$$

(iii) $\exp(\alpha x) = \exp(x)^\alpha \quad \forall \alpha \in [0, \infty)$

Beweis. (i) Aus der Definition folgt, dass $\exp x \in (0, \infty)$ $\forall x \geqslant 0$. Aus $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$ folgt, dass $\exp(\mathbb{R}) \subset (0, \infty)$. Für $h > 0$ gilt also $\exp(h) > \exp(0) = 1$. Damit gilt $\exp(x + h) = \exp(x)\exp(h) > \exp(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, d.h. exp ist streng monoton steigend, insb. injektiv. Die Surjektivität folgt aus (ii) und dem Zwischenwertsatz.

(ii) Sei $x > 0$. Da alle Summanden in $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ positiv sind, gilt $\exp x > \frac{x^k}{(k+1)!}$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Damit folgt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\exp x}{x^\alpha} = \infty \tag{185}$$

Die Aussage $\lim_{x\to-\infty}(-x)^\alpha \exp(x) = 0$ folgt aus (185) und $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$.

(iii) Da $\exp\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ bijektiv ist, folgt $\exp\left(\frac{x}{n}\right) = \exp(x)^{\frac{1}{n}}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, da $\left[\exp\left(\frac{x}{n}\right)\right]^n = \exp(x)$ nach Lemma 6.7(i). Daraus folgt $\forall m \in \mathbb{N}$, dass

$$\exp\left(\frac{mx}{n}\right) = \exp(mx)^{\frac{1}{n}} = \exp(x)^{\frac{m}{n}}$$

, d.h.

$$\exp(qx) = \exp(x)^q \quad \forall q \in \mathbb{Q} \cap [0,\infty)$$

Da $\exp(x)^r$ $\forall r \in [0,\infty)$ durch (eindeutige) stetige Fortsetzung definiert ist und exp stetig ist, gilt $\exp(rx) = \exp(x)^r$ $\forall r \in [0,\infty)$.

□

Definition 6.9. Der (natürliche) Logarithmus $\ln\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist definiert als die Inverse von $\exp\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$, d.h.

$$\ln(\exp(x)) = x \;\forall x \in \mathbb{R}$$

$$\exp(\ln(y)) = y \;\forall <\in (0,\infty)$$

Wir definieren zu $a \in (0,\infty)$ den Logarithmus mit Basis a als $\log_a x := \frac{\ln x}{\ln a}$.
Insbesondere $\ln x = \log_e x$. Notation: $\log x := \ln x$.

Definition 6.10. Der Logarithmus ist stetig, streng monoton steigend und es gilt $\ln 1 = 0, \ln e = 1$. Außerdem gilt $\forall x, y > 0$

(i) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$

(ii) $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x \;\forall \alpha \geqslant 0$

(iii)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \quad \lim_{x\to 0} x^\alpha \ln x = 0$$
für alle $\alpha > 0$

Beweis. Wir zeigen (i). Sei $\xi := \ln x, \eta := \ln y$, d.h. $x = \exp \xi, y = \exp \eta$. Dann ist (i) äquivalent zu $\exp(\ln(xy)) = \exp(\ln x + \ln y) \iff xy = \exp(\xi + \eta) \iff \exp(\xi)\exp(\eta) = \exp(\xi + \eta)$, d.h. (i) folgt aus Lemma 6.7(i). □

Definition 6.11. Zu $x > 0, z \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$x^z := \exp(z \ln x)$$

.
Diese Definition ist konsistent mit der bisherigen Definition der Potenz nach Lemma

6.8(iii). In der Tat sei $x > 0, y = \ln x, x = \exp y, r \geqslant 0$. Dann $x^r = (\exp y)^r) = \exp(ry) = \exp(r \ln x)$.

Bemerkung 6.12. Insbesondere gilt $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\exp z = \exp(z \ln e)$$

Lemma 6.13. *Die Funktion* $f\colon (0, \infty) \times \mathbb{C}, f(x, z) = x^z$ *ist in beiden Variablen stetig. Für* $x, y > 0,\ z, w \in \mathbb{C}$ *gelten*

$$(xy)^z = x^z y^z,\ x^{z+w} = x^z x^w,\ (x^z)^w = x^{zw},\ x^{-z} = \frac{1}{x^z}$$

6.3 Trigonometrische Funktionen, Polarkoordinaten

Definition 6.14. Wir definieren den Kosinus $\cos\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und den Sinus $\sin\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$\cos z := \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \tag{186}$$

$$\sin z := \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \tag{187}$$

Außerdem definieren wir $\tan\colon \mathbb{C}\setminus \cos^{-1}(0) \to \mathbb{C}$:

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

Lemma 6.15. *Die trigonometrischen Funktionen* $\sin, \cos, \tan$ *sind stetig. Es gilt:*

(i) $e^{iz} = \cos z + i \sin z$

(ii) $\sin(-z) = -sin(z), \quad cos(-z) = cos(z)$

(iii)

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Beide Reihen haben Konvergenzradius $R = \infty$.

Beweis. (i) $\cos z + i \sin z = \frac{1}{2}(e^{iz} + \cancel{e^{iz}}) + \frac{1}{2}(e^{iz} - \cancel{e^{-iz}}) = e^{iz}$

(ii) aus Definition

(iii)

$$e^{iz} = 1 + (iz) + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \dots \tag{188}$$

$$= 1 + iz - \frac{z}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \tag{189}$$

da $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, \dots$

□

Lemma 6.16. *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:*

(i) $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$

(ii) $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$

(iii) $\cos z - \cos w = -2 \sin \frac{z+w}{2} \sin \frac{2-w}{2}$

(iv) $\sin z - \sin w = 2 \cos \frac{z+w}{2} \sin \frac{z+w}{2}$

Beweis. (i) $\cos z \cos w - \sin z \sin w = \frac{1}{4}(e^{iz} + e^{-iz})(e^{iw} + e^{-iw}) + \frac{1}{4}(e^{iz} - e^{-iz})(e^{iw} - e^{-iw}) = \frac{1}{4}(e^{i(z+w)} + e^{i(z-w)} + e^{i(w-z)} + e^{-i(z+w)}) + \frac{1}{4}(e^{i(z+w)} - e^{i(z-w)} - e^{i(w-z)} + e^{-i(z+w)}) = \frac{1}{2}(e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}) = \cos(z+w)$

(ii) Übung

(iii) Übung

(iv) Übung

□

Lemma 6.17. *(i) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt* $\cos x \in [-1,1] \subset \mathbb{R}, \sin x \in [-1,1] \subset \mathbb{R}$.

(ii) $|e^{ix}|^2 = \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$

(iii) Für $x \in (0,2)$ gilt:

$$1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

$$x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$$

Beweis. (i) Aus den Potenzreihen von cos, sin folgt $\sin x, \cos x \in \mathbb{R}$ falls $x \in \mathbb{R}$. Aus der Potenzreihendarstellung von $\exp z$ folgt, $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$, insbesondere $\overline{e^{ix}} = e^{\overline{ix}} = e^{-ix}$ für $x \in \mathbb{R}$.

Erinnere $|z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 = z\bar{z} \forall z \in \mathbb{C}$. Damit folgt $|e^{ix}|^2 = e^{ix}\overline{e^{ix}} = e^{ix}e^{-ix} = 1$ und aus $e^{ix} = \cos x + \imath \sin x$ (Lemma 6.15) folgt $\cos x = \operatorname{Re} e^{ix}, \sin x = \operatorname{Im} e^{ix}$, d.h.

$$|e^{ix}|^2 = (\operatorname{Re} e^{ix})^2 + (\operatorname{Im} e^{ix})^2 = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

(ii) siehe (i)

(iii) Sei $x \in (0,2)$ und sei

$$a_n = \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

Dann gilt

$$\sin x = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

Daher gilt $a_n > 0$ für $x \in (0, 2)$ und

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{2n+2}}{x^{2n}} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} = \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)} < \frac{x^2}{6} < 1$$

für $x \in (0, 2)$, d.h. die Folge $(-1)^n a_n$ ist alternierend und es gilt $a_n \searrow$. Die Fehlerabschätzung folgt dann aus dem Konvergenzkriterium von Leibniz für alternierende Reihen.

□

Definition 6.18. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt periodisch falls es ein $p > 0$ gibt mit

$$f(x + p) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

DIe Zahl p heißt dann Periode von f. Falls das Minimum

$$p^* := \min\{p > 0 : p \text{ ist Periode } \}$$

existiert und falls $p^* > 0$, dann heißt p^* Fundamentalperiode. Falls f konstant ist, dann heißt f periodisch mit Periode 0.

Lemma 6.19. *Es gibt eine Lösung $x_0 \in (0, 1)$ von*

$$\sin x_0 = \cos x_0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Es gilt $x_o \in (\frac{1}{2}, 1)$.

Beweis. Aus Lemma 6.17(iii) gilt für $x \in (0, 1)$

$$\begin{cases} 1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2}4 \\ x - \frac{x^3}{7} \leqslant \sin x \leqslant x \end{cases}$$

Falls $x_0 \leqslant \frac{1}{2}$ folgt daraus, dass $\cos x_0 > \frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0.71$, d.h. es gibt keine Lösung $x_0 \in (0, \frac{1}{2}]$. Es folgt auch, dass

$$\cos\frac{1}{2} > \frac{7}{8} > \frac{13}{24} > \cos 1$$

Da $\frac{1}{2}\sqrt{2} \in (\frac{13}{24}, \frac{7}{8})$ folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass es ein $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$ gibt mit $\cos x_0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (der cos ist stetig). Aus

$$\sin^2 x_0 + \cos^2 x_0 = 1$$

folgt $\sin^2 x_0 = \frac{1}{2}$. Aus unserer Abschätzung folgt $\sin x_0 > 0 \ \forall x_0 \in (0,1)$. Damit folgt $\sin x_0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. □

Satz 6.20. *Die Funktion $e^{i\cdot}: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist periodisch mit Fundamentalperiode $p_0 \in (4, 8)$: Auch dei Funktionen $\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind periodisch mit gleicher Fundamentalperiode.*

Beweis. 1 $p > 0$ ist genau dann Periode, falls

$$e^{i(x+p)} = e^{ix+ip} = e^{ix}e^{ip} = e^{ix}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, d.h. genau dann, wenn

$$e^{ip} = 1$$

.

Die Gleichung $z^8 = 1$ hat genau 8 Lösungen $z \in \mathbb{C}$. In der Tat, die Zahlen $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\}$.

Falls $z_1^2 = w, z_2^2 = w$ für ein $w \in \mathbb{C}, w \neq 0$, dann folgt

$$0 = z_1^2 - z_2^2 = (z_1 + z_2)(z_1 - z_2)$$

d.h. $z_1 = \pm z_2$ d.h. die Gleichung $z^2 = w$ hat maximal 2 Lösungen. Daher hat die Gleichung $z^8 = w$ für $w \in \mathbb{C}$ maximal $2^3 = 8$ Lösungen. Damit repräsentiert Q_8 alle Lösungen von $z^8 = 1$.

Insbesondere Löst p die Gleichung genau dann wenn

$$e^{\frac{ip}{8}} \in Q_8$$

d.h.

$$e^{\frac{ip}{8}} = \cos\frac{p}{8} + i\sin\frac{p}{8} \in Q_8 \tag{190}$$

2 Die Fundamentalperiode p_0 von $e^{i\cdot}$ existiert und es gilt $p_0 \in (4, 8)$. Nach 1 ist $q_0 \in (0, 8)$ genau dann eine Periode, falls $x_0 = \frac{q_0}{8} \in (0, 1)$ eine der GLeichungen

$$\cos x_0 + i\sin x_0 \in Q_8 \tag{191}$$

erfüllt. Aus

$$1 - \frac{x_0^2}{2} \leqslant \cos x_0 \leqslant 1 - \frac{x_0^2}{2} + \frac{x_0^4}{24}$$

$$x - \frac{x^3}{6} \leqslant sinx_0 \leqslant x$$

folgt, dass $\sin x_0, \cos x_0 > 0$ für $x \in (0,1)$. Damit kann (191) für $x_0 \in (0,1)$ nur erfüllt sein, falls

$$\cos x_0 + i \sin x_0 = \overbrace{\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{\cos x_0} + i \overbrace{\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{\sin x} \tag{192}$$

Nach Lemma 6.19 existiert eine Lösung $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$ von (192) für $x_0 \in (0, \frac{1}{2}]$.

In der Tat ist die Lösung x_0 von (192) ist eindeutig im Intervall $(\frac{1}{2}, 1)$. Dies folgt aus dem Additionstheorem des Kosinus. Sei $x_0, y_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$ mit $\sin x_0 = \cos x_0 = \sin y_0 = \cos y_0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. O.B.d.A. sei $y_0 \geqslant x_0$ und sei $z_0 = y_0 - x_0 \in [0, \frac{1}{2})$.

$$\cos z_0 = \cos(y_0 - x_0) = \underbrace{\cos x_0 \cos y_0}_{\frac{1}{2}} - \underbrace{\sin x_0 \sin y_0}_{\frac{1}{2}} = 1$$

Aus (191) folgt, das $z_0 = 0$. Damit ist die Lösung eindeutig. Daraus folgt die Existenz der Fundamentalperiode $p_0 \in (4, 8)$.

3 Auch sin, cos sind periodisch mit gleicher Fundamentalperiode. Erinnere $\cos x = \operatorname{Re} e^{ix}$, $\sin x = \operatorname{Im} e^{ix}$. Jede Periode p von $e^{i\cdot}$ ist also Periode von sin, cos. Aus den Additionstheoremen folgt umgekehrt, dass jede Periode von sin (oder cos) auch eine Periode von $e^{i\cdot}$ ist (Übung!).

□

Definition 6.21. Die Zahl $\pi \in (2,4)$ ist definiert als die kleinste positive Zahl, sodass

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$

Lemma 6.22. *(i) Es gilt*

$$e^0 = 1,\ e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\ e^{i\frac{\pi}{2}} = i,\ e^{i\pi} = -1,\ e^{2i\pi=1}$$

$$\cos 0 = 1,\ \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\frac{\pi}{2} = 0, \cos\pi = -1,\ \cos 2\pi = 1$$

$$\sin 0 = 0,\ \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\frac{\pi}{2} = 0,\ \sin\pi = 0,\ \sin 2\pi = 0$$

(ii) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\cos(z+2\pi) = \cos z, \quad \sin(z+2\pi) = \sin z \tag{193}$$
$$\cos(z+\pi) = -\cos z, \quad \sin(z+\pi) = -\sin z \tag{194}$$
$$\cos\left(z+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin z, \quad \sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right) = \cos z \tag{195}$$

(iii)

$$\{x \in \mathbb{R} : \sin x = 0\} = \pi\mathbb{Z} \tag{196}$$
$$\{x \in \mathbb{R} : \cos x = 0\} = \pi\left(\mathbb{Z}+\frac{1}{2}\right) \tag{197}$$

(iv) sin *ist streng monoton wachsend in* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
cos *ist streng monoton fallend in* $[0,\pi]$

Beweis. (i) Aus der Potenzreihendarstellung von e^z und Theorem 6.20(?) gilt $e^0 = 1, e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$. Die anderen Identitäten folgen aus $(e^{i2x}) = (e^{ix})^2$ z.B. $e^{i\frac{\pi}{2}} = (e^{i\frac{\pi}{4}})^2 = \cdots = i$.

(ii) folgt aus (i) und Additionstheorem

(iii) Aus (i) folgt, dass die angegebenen Werte Nullstellen sind. Aus

$$x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!}$$

für $x \in [0,2]$ folgt, dass $\sin x > 0$ für $x \in (0, \frac{\pi}{2}] \subset (0,2]$. Zusammen mit (ii) erhalten wir die Aussage.

(iv) Folgt aus den Additionstheoremen und (i).

□

Satz 6.23. *Die Funktion* $\Phi\colon [0, 2\pi) \to \partial B_1 \subset \mathbb{C}$ $\Phi(\Theta) = e^{i\Theta}$ *ist bijektiv und stetig. Jedes* $z \in \mathbb{C}$ *lässt sich darstellen in der Form*

$$z = re^{ir\Theta}$$

für $r \in [0, \infty), \Theta \in [0, 2\pi)$. *Die Darstellung ist eindeutig für* $z \neq 0$.

Beweis. Da $\cos\left(\Theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\Theta$, $\sin\left(\Theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\Theta$ reicht es zu zeigen,d sas $\Phi = e^{i\Theta} = \cos\Theta + i\sin\Theta$ bijektiv als Funktion

$$\Theta\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \{z = e^{i\Theta} \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

Nach Lemma 6.22(ii) ist sin streng monoton auf $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, insbesondere ist Φ injektiv auf $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Sei nun $z = x + iy,\ x^2 + y^2 = 1,\ x, y \geqslant 0$.
Da $y \in [0, 1],\ \sin 0 = 0,\ \sin\frac{\pi}{2} = 1$ gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $\Theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ mit $\sin\Theta = y$. Da $\cos \geqslant 0$ in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ folgt, dass $\cos\Theta = \sqrt{1 - \sin^2\Theta} = \sqrt{1 - y^2} = x$ d.h. $e^{i\Theta} = x + iy = z$. Damit ist $\Phi\colon [0, 2\pi)$ bijektiv.
Sei $z \in \mathbb{C}$. Für $z = 0$ gilt $z = re^{i\Theta}$ für $r = 0$ und Θ beliebig. Für $z \neq 0$ gilt $\frac{z}{|z|} \in \partial B_1$, d.h. es existiert $\Theta \in [0, 2\pi)$
$\frac{z}{|z|} = e^{i\Theta} \implies z = |z|e^{i\Theta} = re^{i\Theta}$ für $r = |z|$. □

Korollar 6.24. *Sei* $\Psi(r, \Theta) = re^{i\Theta}$ *Seien* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *mit* $z_1 = \Psi(r_1, \Theta_1),\ z_2 = \Psi(r_2, \Theta_2)$. *Dann gilt*

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i\Theta_1} e^{i\Theta_2} = (r_1 r_2) e^{i(\Theta_1 + \Theta_2)}$$

d.h.

$$\Psi(r_1, \Theta_1)\Psi(r_2, \Theta_2) = \Psi(r_1 r_2, \Theta_1 + \Theta_2)$$

Bei der Multiplikation komplexer Zahlen multipliziert sich der Betrag und es addieren sich die Winkel.

7 Differentialrechnung

Wir differenzieren Funktionen $f\colon I \to \mathbb{R}^d, I \subset \mathbb{R}$ Intervall.

Definition 7.1. Sei $f\colon I \to \mathbb{R}^d$.

(i) f heißt **differenzierbar** in $x_0 \in I$, falls der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. Dann heißt $f'(x_0)$ **Ableitung von f an** x_0. Wir schreiben auch:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0), \quad Df(x_0), \quad f_x(x_0), \quad \dot{f}(x_0)$$

(ii) f heißt **differenzierbar** falls f diffbar ist $\forall x_0 \in I$.

Lemma 7.2. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ offen, $f\colon I \to \mathbb{R}, x_0 \in I$ und sei f diffbar in x_0. Dann ist f stetig in x_0.*

Beweis. Sei f also unstetig an $x - 0$. Dann gibt es eine Folge $h_k \to 0$ sodass $f(x_0 + h_k)$ nicht gegen $f(x_0)$ konvergiert. Dann divergiert

$$\frac{f(x_0 + h_k) - f(x_0)}{h} \quad \text{für } k \to \infty$$

d.h. f ist **nicht** diffbar an x_0. □

Beispiel 7.3. Die Funktion ist $|x|$ ist stetig an $x = 0$, aber nicht diffbar.

Satz 7.4. *Sei $f\colon I \to \mathbb{R}, I$ offen, $x_0 \in I$. Dann ist f genau dann in x_0 diffbar, falls es ein $\phi\colon I \to \mathbb{R}$, ϕ stetig in x_0 gibt mit*

$$f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0)$$

Beweis. **„⇒"** Sei f in x_0 diffbar. Setze

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & x \neq x_0 \\ f'(x_0) & x = x_0 \end{cases}$$

Aus der Definiton 7.1 und Lemma 7.2 folgt, das ϕ stetig in x_0 ist.

„⇐" Für $x \neq x_0$ folgt aus vorherigen Überlegungen:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \phi(x) \overset{\phi \text{ stetig in } x_0}{\longrightarrow} \phi(x_0)$$

d.h. f ist diffbar an x_0.

□

Satz 7.5. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ offen, $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ diffbar in $x_0 \in I$. Dann*

(i) $f + g$ ist diffbar in x_0 und

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

(ii) $f \cdot g$ diffbar in x_0 und

$$(fg)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$$

Für $z \in \mathbb{C}$ ist auf zf diffbar an x_0 und es gilt $(zf)'(x_0) = zf'(x_0)$

(iii) Falls außerdem $g'(x_0) \neq 0$, dann ist $\frac{f}{g}$ an x_0 diffbar und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Beweis. (i) Übungsaufgabe

(ii) Folgt aus

$$\frac{(fg)(x_0+h) - (fg)(x_0)}{h} \tag{198}$$

$$= \underbrace{g(x_0+h)}_{\to g(x_0)} \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\to f'(x_0)} + f(x_0) \underbrace{\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}}_{\to g'(x_0)} \tag{199}$$

$$\to g(x_0)f'(x_0) + g'(x_0)f(x_0) \quad \text{für } h \to 0 \tag{200}$$

(iii) Wir zeigen

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2} \tag{201}$$

$$\frac{\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}}{h} = \frac{1}{g(x_0+h)g(x_0)} \frac{g(x_0) - g(x_0+h)}{h} \tag{202}$$

$$\to -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2} \tag{203}$$

□

Satz 7.6. *Seien I, J offen. Sei $f\colon I \to J$ diffbar in $x_0 \in I$, sei $g\colon J \to \mathbb{R}$ diffbar in*

$y_0 = f(x_0) \in J$. Dann ist $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ diffbar in x_0 und

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)g'(f(x_0))$$

Beweis. Nach Satz 7 gibt es $\phi : I \to J, \Psi : J \to \mathbb{R}$ stetig in x_0 bzw. y_0 mit

$$f(x) = (x - x_0)\phi(x) + f(x_0) \tag{204}$$

$$g(y) = (y - y_0)\Psi(y) + g(f(x_0)) \tag{205}$$

d.h.

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = (f(x) - f(x_0))\Psi(f(x)) = (x - x_0)\underbrace{\phi(x)\Psi(f(x))}_{\text{stetig in } x_0}$$

d.h. $g \circ f$ ist diffbar und

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \phi(x)\Psi(f(x + h)) \tag{206}$$

$$\to \phi(x_0)\Psi(f(x_0)) \tag{207}$$

$$= f'(x_0)g'(f(x_0)) \tag{208}$$

□

Lemma 7.7. *(i) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}$, dann ist f differenzierbar mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f = 0$.*

(ii) Die Polynomfunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^n$ ist diffbar und es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = n x^{n-1}$$

(iii) Die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist diffbar und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \exp(x) = \exp x$$

(iv) Die Funktionen $\sin, \cos, \tan$ sind diffbar und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin x = \cos x, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos x = -\sin x, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

(v) Die Funktion $f = (f_1, \ldots, f_d)\colon I \to \mathbb{R}^d$ ist genau dann diffbar in x_0, wenn jede Komponente f_i, $i = 1, \ldots, d$ diffbar in x_0 ist. In diesem Fall gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x_0) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_1(x_0), \ldots, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_d(x_0) \right)$$

Beweis. (i) Folgt aus $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$

(ii) Beweis durch Induktion.

Induktionsanfang: Für $n = 1 : f(x) = x$ gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

Induktionsvoraussetzung: Die Aussage gilt für festes $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: Mit der Produktregel gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^{n+1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (x x^n) = x^n + x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n \overset{IV}{=} (n+1) x^n$$

(iii)

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sum_{n=0} \frac{h^n}{n!}\right) - 1}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{n-1}}{n!}}_{=1+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{h^{n-1}}{n!}}$$

Die Potenzreihe konvergiert gleichmäßig für $|h| < 1$. Also gilt $\lim_{h\to 0} \frac{h^{n-1}}{n!} = 1$. Wir folgern die Diffbarkeit von exp und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \exp x = \exp x$.

(iv)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{2}(\exp(ix) + \exp(-ix)) = \frac{1}{2}(i\exp(ix) - i\exp(-ix)) = -\sin x \quad (209)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{2i}(\exp(ix) - \exp(-ix)) = \frac{1}{2}(\exp(ix) + \exp(-ix)) = \cos x \quad (210)$$

Die Ableitung von tan folgt aus der Quotientenregel.

(v) Das folgt aus der Äquivalenz von Konvergenz in $\mathbb{R}^d$ zur komponentenweisen Konvergenz.

□

Satz 7.8 (Ableitung der Umkehrfunktion)**.** *Sei I ein Intervall, das mehr als einen Punkt enthält. Sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig, streng monoton, $J := f(I)$. Sei f in $x_0 \in I$ diffbar mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion $g: J \to I$ in $y_0 = f(x_0)$ diffbar mit*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}$$

Beweis. Zunächst gilt: g ist stetig in x_0, da g Umkehrfunktion von f ist.
$\exists \phi: I \to \mathbb{R}$ stetig mit $\phi(x_0) = f'(x_0)$, sodass

$$f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0) \quad (211)$$

Dies folgt aus Satz 7.4.
Da $\phi(x_0) = f'(x_0) \neq 0$ (nach Voraussetzung) ist ϕ in einer offenen Umgebung von x_0 ungleich 0, da ϕ stetig ist.
Da g stetig bei y_0 ist, existiert eine offene Umgebung V von y_0 mit $\phi(g(y) =\neq 0$ für all $y \in V$.
Für $y \in V$ und $x = g(y)$ (d.h. $f(x) = y$) erhalten wir aus (211)

$$y = y_0 + \phi(g(y))(g(y) - g(y-0)) \implies \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\phi(g(y))}$$

für alle $y \in V$.
Da g stetig bei y_0 und ϕ stetig bei $x_0 = g(y_0)$, folgt

$$\lim_{y \to y_0} \frac{1}{\phi(g(y))} = \frac{1}{\phi(\lim g(y))} = \frac{1}{\phi(g(y_0))} = \frac{1}{\phi(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}$$

□

Die Voraussetzung $f'(x_0) \neq 0$ darf nicht weggelassen werden. Gegenbeispiel: $f(x) = x^3$.

Lemma 7.9. *Die Funktion* $\ln\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *ist diffbar und es gilt*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = \frac{1}{x}$$

Beweis. Da ln die Umkehrfunktion von exp ist und da exp strinkt monoton und diffbar auf $\mathbb{R}$ ist, folgt aus Satz die Diffbarkeit von ln und die Identität

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = \frac{1}{(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\exp)(\ln x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}$$

□

7.1 Mittelwertsatz, lokale Maxima und Minima

Definition 7.10 (Maxima und Minima)**.** Sei (X, d_x) ein metrischer Raum, $E \subset X, f\colon E \to \mathbb{R}$.

(i) Die Funktion f hat in x_0 ein **globales Maximum (Minimum)** falls $f(x_0) \geqslant f(x)$ für alle $x \in E$ (bzw. $f(x_0) \leqslant f(x)$ für all $x \in E$). Die Stelle x_0 heißt dann Maximumsstelle (bzw. Minimumsstelle) oder auch Maximierer (bzw. Minimierer).

(ii) die Funktion f hat in x_0 ein **lokales** Maximum (Minimum), wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, sodass $f(x) \leqslant f(x)$ für alle $x \in B_\epsilon(x_0) \cap E$ (bzw. $f(x_0) \leqslant f(x)$ für alle $x \in B_\epsilon(x_0) \cap E$).

Ein Extremum ist ein Minimum oder Maximum

Satz 7.11 (Notwendige Bed. für lokale Extrema)**.** *Sei* $f\colon I \to \mathbb{R}, x_0 \in \overset{\circ}{I}$*, sei* f *diffbar in* x_0 *und sei* x_0 *ein lokaler Maxi- bzw. Minimierer. Dann gilt* $f'(x_0) = 0$.

Beweis. (durch Widerspruch)
Wir nehmen also an $f'(x_0) \neq 0$. OBdA sei $f'(x_0) > 0$ (sonst betrachte -f). Es gibt ein ϕ, stetig in x_0, mit $f(x) = f(x_0) + \underbrace{\phi(x)(x - x_0)}_{>0}$ und $\phi(x_0) = f'(x_0) > 0$. Da ϕ stetig bei x_0 existiert $\epsilon > 0$ mit $\phi(x) > 0$ für alle $x \in B_\epsilon(x_0) \subset I$.
Daraus folgt $f(x) > f(x_0)$ für $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$ und $f(x) < f(x_0)$ für $x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$. Damit ist x_0 kein Extremum von f. □

Die Voraussetzung $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ ist notwendig. Beispiel: $I = [0, 1], f(x) = x$. $x_0 - 1$ ist Maxinimierer, aber $f'(x_0) = 1 \neq 0$.

Satz 7.12 (Satz von Rolle)**.** *Sei* $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig in* $[a,b]$ *und diffbar in* (a,b). *Weiterhin gelte* $f(x) = f(b)$. *Dann gibt es ein* $x_0 \in (a,b)$ *mit* $f'(x_0) = 0$.

Satz 7.13 (Rolle)**.** *Sei $a < b, f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig in $[a,b]$ und diffbar in (a,b). Falls $f(a) = f(b)$, dann existiert $x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x_0) = 0$.*

Beweis. Sei $I = [a,b]$. Da I kompakt, f stetig $\implies$ f hat ein Maximum und ein Minimum. Falls $\min f(I) = \max f(I)$, dann ist f konstant $\implies$ $f' = 0$ auf I.
Andernfalls $\min f(I) < f(a) = f(b)$ oder $\max f(I) > f(a) = f(b)$. In beiden Fällen besitzt f jeweils ein Extremum $x_0 \in (a,b)$. Dann folgt aus Satz 7.11 $f'(x_0) = 0$. □

Satz 7.14 (Mittelwertsatz)**.** *Sei $a < b, f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig in $[a,b]$ und diffbar in (a,b). Dann gibt es ein $x_0 \in (a,b)$ mit*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Beweis. Wir definieren $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = g(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Es gilt $g(a) = f(b) = f(a)$, $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Mit Rolle folgt: $\exists x_0 \in (a,b)$ mit $g'(x_0) = 0$. □

Korollar 7.15. *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig in $[a,b]$, diffbar in (a,b). Falls $f' = 0$ in (a,b), dann ist f konstant.*

Korollar 7.16. *Sei $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig in $[a,b]$, diffbar in (a,b). Dann gilt*

(i) $f' \geqslant 0$ in (a,b) $\iff$ f ist monoton wachsend.

(ii) $f' > 0$ in (a,b) $\iff$ f ist streng monoton wachsend.

Beweis. zu (i): Falls f nicht monoton wachsend ist, dann existieren a_0, b_0 mit $f(a_0) > f(b_0)$. Aus dem MWS folgt $f'(x_0) = \frac{f(b_0)-f(a_0)}{b_0-a_0} < 0$ für ein $x_0 \in (a_0,b_0) \subset (a,b)$.
Andererseits, falls f monoton wachsend ist, dann gilt

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqslant 0 \quad \forall x,y \in (a,b),\ x \neq y \qquad \implies f'(x) \geqslant 0$$

zu (ii): $f' > 0$ $\implies$ f monoton wachsend. Falls f nicht streng monoton wachsend ist, dann existiert $a_0 < b_0$ in $[a,b]$ mit $f(a_0) = f(b_0)$. Der Satz von Rolle zeigt nun $f'(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in (a_0,b_0)$ ↯. □

Satz 7.17 (Verallgemeinerter MWS)**.** *Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig in $[a,b]$ und diffbar in (a,b) mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann ist $g(a) \neq g(b)$ und es gibt ein $x_0 \in (a,b)$ mit*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Beweis. Übung □

Satz 7.18 (Regel von l'Hospital)**.** *Seien $a < b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $I = [a,b]$, $x_0 \in [a,b]$. $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in einer Umgebung mit stetiger Ableitung. Außerdem gelte $g(x) \neq 0, g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I \backslash \{x_0\}$ und*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

oder

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$$

Die Aussage bleibt gültig, wenn $\lim_{x\to x_0}$ durch $\lim_{x\nearrow} x_0$ oder $\lim_{x\searrow x_0}$ ersetzt wird.

Beweis. **Schritt 1** Der Fall $x_0 \in (a,b]$. $\lim_{x\nearrow x_0} f(x) = \lim_{x\nearrow x_0} g(x) = 0$.

f, g stetig $\Longrightarrow$ $f(x_0) = g(x_0) = 0$.

Verallg. MWS $\Longrightarrow$ $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))}$ für ein $\xi(x) \in (x, x_0)$.

Da $\lim_{x\nearrow x_0} \xi(x) = x_0$ und f', g' stetig im Umgebung von x_0:

$$\lim_{x\nearrow x_0} \frac{f(x)g(x)}{=} \lim_{x\nearrow x_0} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \lambda$$

Schritt 2 Falls $x_0 = \pm\infty$, dann wende Schritt 1 auf $\tilde{f}(x) = f(\frac{1}{x})$, $\tilde{g} = g(\frac{1}{x})$ an.

Schritt 3 Der Fall $\lim_{x\nearrow x_0} f(x) = \lim_{x\nearrow x_0} g(x) = +\infty$. Wende Schritt 1 auf die Funktionen $\tilde{f}(x) = \frac{1}{g(x)}$, $\tilde{g}(x) = \frac{1}{f(x)}$ an.

Schritt 4 Falls rechsseitige oder beidseitige Grenzwerte existieren, dann wende Schritt 1 auf $\tilde{f}(x) = f(-x)$ und $\tilde{g}(x) = g(-x)$ an.

□

Beispiel 7.19.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^k}{e^x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{kx^{k-1}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{k(k-1)x^{k-2}}{e^x}$$

Durch k-faches Anwenden von l'Hospital:

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{k!}{e^x} = 0$$

7.2 Höhere Ableitungen, die Räume C^k

Definition 7.20 (Höhere Ableitungen)**.** Sei $k \in \mathbb{N}$, $f\colon I \to \mathbb{R}^d$. Falls die Ableitung f' von f differenzierbar ist, dann definieren wir die zweite Ableitung von f durch $f^{(2)} := f'' := (f')'$. Induktiv definieren wir auf diese Weise, falls existent, die k-te Ableitung von f durch $f^{(k)} := (f^{(k-1)})'$.
Falls die k-te Ableitung von f existiert, dann heißt f **k-mal differenzierbar**. Falls die k-te Ableitung existiert und stetig ist, heißt f **k-fach stetig differenzierbar**.
Sei $E \subset I$ mit $E^\circ \neq \emptyset$. Falls die k-te Ableitung von f in $E \subset I$ existiert (und stetig ist), dann heißt f k-mal (stetig) diffbar in E.

Definition 7.21 (C^k-Raum)**.** Wir definieren den Raum der k-mal **stetig** diffbaren Funktionen durch

$$C^k(I,\mathbb{R}^d) := \{f\colon I \to \mathbb{R}^d | f \text{ ist k-mal stetig diffbar } \}$$

Weiterhin definieren wir den Raum der **glatten** Funktionen durch

$$C^\infty(I,\mathbb{R}^d) := \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(I,\mathbb{R}^d)$$

Im Fall $d = 1$ benutzen wir die Notation $C^k(I) := C^k(I,\mathbb{R})$.

Beispiel 7.22. Die Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$ hat die Ableitung $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, welche nicht in $x = 0$ existiert, d.h. $f' \in C^0((0,\infty)), f' \notin C^0([0,\infty))$.
Wir schreiben $f \in C^0([0,\infty)) \cap C^1((0,\infty))$.

Lemma 7.23. *Sei $k \in \mathbb{N}$, I und J offene Intervalle.*

(i) Seien $f, g \in C^k(I)$: Dann gilt $f+g, fg \in C^k(I)$. Falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in I$; dann gilt $\frac{f}{g} \in C^k(I)$.

(ii) Sei $f \in C^k(J), g \in C^k(I,J)$: Dann gilt $f \circ g \in C^k(I)$.

(iii) Sei $k > 0$ und $f \in C^k(I)$ und $f' \neq 0$. Dann $f^{-1} \in C^k(J), J := f(I)$

Beweis.

1. $f + g \in C^k(I)$ klar. Für fg mit $(fg)' = f'g + fg'$ Beweis über Induktion über k. $\frac{f}{g}$ zur Übung.
2. Folgt induktiv aus Kettenregel.
3. Argument für $k = 1$: Da f' stetig, $f' \neq 0$ gilt auf Intervall I $f' > 0$ oder $f' < 0$. OBdA sei $f' > 0$. f ist streng monoton wachsend und die Umkehrfunktion $g\colon J \to I$ ist stetig und diffbar mit $g' = \frac{1}{f' \circ g} = \pi \circ f' \circ g$, wobei $\phi(X) = \frac{1}{x},\ \phi \in C^\infty(\mathbb{R}\backslash\{0\})$. Es folgt g' ist stetig und damit $g \in C^1(J)$.

   Argument für $k = 2$: Nach Teil (ii) und der Kettenregel gilt $f' \circ g \in C^1(J)$ und $(f \circ g)' = (f'' \circ g)g'$ sowie $\phi \circ (f' \circ g) \in C^1(J)$ und $(\phi \circ f' \circ g)' = (\phi' \circ f' \circ g)(f'' \circ g)g'$. Alle Funktionen auf der rechten Seite sind stetig, also ist g'' stetig, also $g \in C^2(J)$. Per Induktion folgt Aussage auch für alle $k > 2$.

□

Definition 7.24. Eine Funktion $f \in C^k(I)$ mit $f^{-1} \in C^k(J), J = f(I)$ heißt C^k-**Diffeomorphismus**. Im Fall $k = 0$ heißt f auch Komeomorphismus.

Definition 7.25. Seien $a < b \in \mathbb{R}$. Für $f \in C^k([a,b])$ definieren wir die Norm

$$\|f\|_{C^k} := \sum_{j=0}^{n} \|f^{(j)}\|$$

Es lässt sich zeigen, dass $C^k([a,b])$ mit der von der Norm induzierten Metrik $d(f,g) := \|f-g\|_{C^k}$ ein vollständiger Raum ist (Übung!).

7.3 Differenzierbarkeit und gleichmäßige Konvergenz

Satz 7.26. *Sei I ein offenes Intervall, $f_n \in C^1(I)$, $g\colon I \to \mathbb{R}$. Es gelte $f_n(x) \to f(x)$ und $f_n' \rightrightarrows g(x)$ gleichmäßig in I. Dann gilt $f \in C^1(I)$*

$$f'(x) = g(x)$$

Beweis. Da die Funktionen f_n' stetig sind und gleichmäßig gegen g konvergieren, ist g stetig. Sei $x_0 \in I$ beliebig. Für $h > 0$:

$$\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - g(x_0)\right| \leqslant \frac{1}{h}\left|f_n(x_0+h) - f(x_0+h)\right| \tag{212}$$

$$+\frac{1}{n}\left|f_n(x_0) - f(x_0)\right| + \left|\frac{f_n(x_0+h)-f_n(x_0)}{h} - g(x)\right| \tag{213}$$

Sei nun $\epsilon > 0$ gegeben. Da $f_n \to f$, gibt es ein $n^* \in \mathbb{N}$, sodass $f_1(x_0) - f(x_0) < \frac{\epsilon h}{4}$ und $|f_n(x_0+h) - f(x_0+h)| < \frac{\epsilon h}{4} \forall n > n*$.
Nach dem MWS exisitert zu f_n ein ξ_n zwischen x_0 und $x_0 + h$ mit

$$f_n(x_0+h) - f_n(x_0) = hf'(\xi_h)$$

Daraus erhalten wir

$$\left|\frac{f_n(x_0+h)-f_n(x_0)}{h} - g(x_0)\right| = |f_n'(\xi_n) - g(x_0)| \tag{214}$$

$$\leqslant |g(x_0) - f_n'(x_0)| + |f_n'(x_0) - f_n'(\xi_n)| \tag{215}$$

Da $f_n' \to g$ gibt es ein $n^{**} > n^*$, sodass $|g(x_0) - f_n'(x_0)| < \frac{\epsilon}{4}$.
Da $f_n \rightrightarrows g$ und g stetig ist, gibt es ein $h^{***} > h^{**}$ und ein $h^* > 0$, sodass

$$\|f_n'(x_0) - f_n'(\xi_n) \leqslant \sup_{y\in(x_0,x_0+h)} |f_n'(x_0)f_n'(y)| \tag{216}$$

$$\leqslant \sup_{y\in(x_0,x_0+h)} |g(x_0) - g(y)| + \frac{\epsilon}{8} \leqslant \epsilon 4 \tag{217}$$

Für alle $h < h^*$ lässt sich ein h^{***} angeben, sodass

$$\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - g(x_0)\right| < \epsilon$$

Daraus folgt $f' = g$ in I. □

Bemerkung 7.27. Der Satz sagt aus, dass im Falle $f_n \to f$ und $f_n' \rightrightarrows g$ Konvergenz und Differentation vertauschen, d.h.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x)$$

Beispiel 7.28. Die gleichmäßige Konvergenz ist eine notwendige Bedingung. Sei $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sin(nx)$. Dann gilt $|f_n(x) <\leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \to \infty$ und daher $f_n \to 0$ für $n \to \infty$. Andererseits haben wir $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos(nx)$. Insbesondere gilt $f_n'(0) = \sqrt{n} \to \infty$ für $n \to \infty$, f_n' konvergiert pktw nicht gegen 0, also auch nicht lgeichmäßig.

Betrachte relle Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad a_n \in \mathbb{R}$. aus den Sätzen für komplexe Potenzreihen folgt: Konvergiert die Reihe absolut für $|x| < R$, dann auch gleichmäßig in $(-R+\epsilon, R-\epsilon)$ $\forall \epsilon > 0$.

Satz 7.29. *Sei* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $a_n \in \mathbb{R}$ *eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R > 0$. *Dann hat die Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ *den gleichen Konvergenzradius und es gilt*

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

Es gilt also $f \in C^{\infty}((-R, R))$.

Beweis. Da $\sqrt[n]{n+1} = (n+1)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\log(n+1)} \to e^0 = 1$ für $n \to \infty$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} = \limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R}$$

Die Aussage folgt dann aus 7.26. □

Korollar 7.30. *Sei* $f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R > 0$. *Dann gilt* $f \in C^{\infty}((-R, R))$ *und* $f^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^k a_n x^n$.

Beispiel 7.31. Aus Korollar 7.30 erhalten wir einen weiteren Beweis für $\exp, \sin, \cos \in$

$C^\infty(\mathbb{R})$ und $\sin' = \cos$. So gilt z.B:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x$$

8 Das eindimensionale Riemann-Integral

8.1 Definition und Grundlagen

Definition 8.1 (Zerlegung)**.** Sei $a, b \in \mathbb{R}, a < b, I = [a, b]$. Eine Zerlegung τ des Intervalls $[a, b]$ ist eine endliche Teilmenge von Punkten $\tau := \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b\} \subset [a, b]$.
Die Menge der Zerlegungen $Z(I)$ ist geordnet durch die Ordnungsrelation $\sigma \leq \tau \iff (p \in \sigma \implies p \in \tau$.
Falls $\sigma \leq$, dann heißt τ eine **Verfeinerung** von σ. Wir definieren weiterhin $I_n := [x_{n-1}, x_n], n = 1, \ldots, N$. Die **Feinheit** der Zerlegung τ ist $\Delta(\tau) = \max_{k=1,\ldots,N} |I_n|$.

Definition 8.2. Sei $a, b \in \mathbb{R}, a < b, I = [a, b]$, sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ beschränkt und sei $\tau = \{a = x_0 < \cdots < x_N = b\}$ Zerlegung von I. Sei $I_n = [x_{n-1}, x_n]$.

(i) Zu (f, τ) definieren wir die **Riemannsche Obersumme** $\bar{S}(f, \tau)$ durch

$$\overline{S}(f, \tau) = \sum_{k=1}^{N}(\sup_{I_n} f)|I_n|$$

(ii) Zu (f, τ) definieren wir die **Riemannsche Untersumme** $\underline{S}(f, \tau)$ durch

$$\underline{S}(f, \tau) = \sum_{k=1}^{N}(\inf_{I_n} f)|I_n|$$

(iii) Sei $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$ und sei $\xi_k \in I_k$ für $k = 1, \ldots, N$. Zu (f, τ, ξ) definieren wir die **Riemannsche Zwischensumme** $S(f, \tau, \xi)$ durch

$$S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)|I_k|$$

f ist **Riemann-Integral** genau dann, wenn

$$\inf_{\tau \in Z(I)} \overline{S}(f, \tau) = \sup_{\tau \in Z(I)} \underline{S}(f, \tau)$$

Lemma 8.3. *$a, b \in \mathbb{R}, a < b, I = [a, b], F\colon I \to \mathbb{R}$ beschränkt. Seien $\tau, \sigma \in Z(I)$ mit $\sigma \leqslant \tau$. Dann gilt*

$$\underline{S}(f,\sigma) \leqslant \underline{S}(f,\tau) \leqslant \overline{S}(f,\tau), \overline{(}f,\sigma)$$

Beweis. Mit Induktion reicht es den Fall

$$\sigma = \{x_0 = a < \cdots < b = x_N\rangle\}, \quad \tau = \sigma \cup \{y\}, \quad y \in \mathring{I} \setminus \sigma$$

d.h.

$$\tau = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < y < x_k < \cdots < x_N\}$$

für ein $k \in \{1, \ldots, N\}$.

$$\overline{S}(f,\sigma) - \overline{S}(f,\tau) = \sup_{I_k} f(x_k - x_{k-1} - \sup_{(x_{k-1},y)} f(y - x_{k-1}) - \sup_{(x_k,y)} f(x_k - x) \tag{218}$$

$$\leqslant \sup_{I_k} f(\cancel{x_k} - \cancel{x_{k-1}} - \cancel{y} + \cancel{x_{k-1}} - \cancel{x_k} + \cancel{y}) = 0 \tag{219}$$

Ändere $\leqslant$ analog. □

Definition 8.4. $a, b \in \mathbb{R}, a < b, I = [a, b], f \in B(I)$.

(i) Das **Oberintegral** von f ist

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \inf_{\tau \in Z(I)} \overline{S}(f,\tau) \quad (< \infty)$$

(ii) Das **Oberintegral** von f ist

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \sup_{\tau \in Z(I)} \underline{S}(f,\tau)$$

(iii) Falls Oberintegral und Unterintegral übereinstimmen, dann heißt f **Riemannintegrierbar** und

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Notation: $\int_a^b f\,\mathrm{d}x := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Falls $a \leqslant b$, $\int_I f\,\mathrm{d}x := \int_a^b f\,\mathrm{d}x$.

Bemerkung 8.5. Seien $f, g\colon E \to \mathbb{R}$. Die Notation $f \leqslant g$ bedeutet $f(x) \leqslant g(x) \forall x \in E$.

Lemma 8.6. *$a, b \in \mathbb{R}, a \leqslant b, I = [a, b]$*

(i) $R(I)$ ist UVR von $B(I)$ und für alle $f, g \in R(I)$, $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\int_I \underbrace{(\lambda f + \mu g)}_{\in R(I)} \mathrm{d}x = \lambda \int_I f \,\mathrm{d}x + \mu \int_I g \,\mathrm{d}x$$

(ii) $f, g \in R(I), f \leqslant g$. Dann

$$\int_I f \,\mathrm{d}x \leqslant \int_I g \,\mathrm{d}x$$

(iii) Falls $f \in R(I)$, dann $|f| \in R(I)$ und

$$\left| \int_I f \,\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_I |f| \,\mathrm{d}x$$

(Dreiecks-Ungleichung)

Beweis. ÜA. Beweis für O/U-Summen. Abschätzungen bleiben im Limes erhalten. □

Bemerkung: $\|f\|_{L^1} := \int_I |f| \,\mathrm{d}x$ definiert eine Norm auf $R(I)$.

Lemma 8.7. *$a, b \in \mathbb{R}, a \leqslant b, I = [a, b], f \in R(I)$. Dann:*

$$|I| \inf_I f \leqslant \int_I f \,\mathrm{d}x \leqslant |I| \sup_I f$$

Beweis. Wähle $\tau \in Z(I), \tau = \{a = x_0 \leqslant b = x_1\}$. Dann:

$$|I| \inf_I f = \underline{S}(f, \tau) \leqslant \int_I f \leqslant \overline{S}(f, \tau) = |I| \sup_I f$$

□

Beispiel 8.8. Die Fkt. $\chi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \chi(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ist auf keinem nicht-trivialen Intervall $I = [a, b], a < b$ R-integrierbar.

Beweis. Für jede Zerlegung $\tau = \{x_0 < \cdots < x_N\}, \tau \in Z(I), I_K = (x_{k-1}, x_k)$ gilt $0 = \inf_{I_k} < \sup_{I_k} f = 1$ und daher

$$\underline{S}(f,\tau) = 0, \quad \overline{S}(f,\tau) = b - a$$

$\implies \overline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}x = b - a, \quad \underline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}x = 0$ □

Lemma 8.9. *$a, b \in \mathbb{R}, a < b, I = [a,b], f \in B(I)$. Dann gilt $f \in R(I)$ genau dann wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\tau \in Z(I)$ gibt mit*

$$\overline{S}(f,\tau) - \underline{S}(f,\tau) < \epsilon \tag{220}$$

Beweis. „$\Leftarrow$“ Es gelte (220). Dann ist $f \in R(I)$ nach Definition.

„$\Rightarrow$“ Da $f \in R(I)$ existieren $\tau_1, \tau_2 \in Z(I)$ mit

$$\overline{S}(f,\tau_2) - \underline{S}(f,\tau_1) < \epsilon \tag{221}$$

Wähle $\tau = \tau_1 \subset \tau_2$, d.h. $\tau_1 < \tau, \tau 2 < \tau$. Aus Lemma 8.3 folgt

$$\overline{S}(f,\tau) - \underline{S}(f,\tau) < S(f,\tau_1) \tag{222}$$

$$< \overline{S}(f,\tau_1) - \underline{S}(f,\tau_2) \overset{(221)}{<} \epsilon \tag{223}$$

□

Definition 8.10. Sei $E \subset \mathbb{R}, f\colon E \to \mathbb{R}$ beschränkt. Die Oszillation von f ist definiert durch

$$\operatorname*{osc}_E f = \sup_{x,y \in E} |f(x) - f(y)| = \sup_E f - \inf_E f$$

Sei $\tau \in Z(I), f \in B(I), I = [a,b]$. Dann gilt

$$\overline{S}(f,\tau) - \underline{S}(f,\tau) = \sum_{k=1}^{N} \left(\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f \right) |I_k| \tag{224}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \left(\operatorname*{osc}_{I_k} f \right) |I_k| \tag{225}$$

wobei $\tau = \{x_0 < \cdots < x_N\}, I_N = (x_{n-1}, x_k)$.

Lemma 8.11. *$a, b \in \mathbb{R}$, $I = [a, b]$, $a < b$, $f \in R(I)$:
Seien $\tau^{(n)} \in Z(I)$, $\tau^{(n)} = \{a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_{N^{(n)}}^{(n)} = b\}$ eine Folge von Zerlegungen mit $\Delta\tau^{(n)} \to 0$ und sei $\xi^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_{N^{(n)}}^{(n)})$ mit $\xi_n^{(n)} \in I_k^{(n)} = (x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)})$. Dann gilt für $n \to \infty$:*

$$\overline{S}(f, \tau^{(n)}) \to \int_I f(x)\,\mathrm{d}x \tag{226}$$

$$\underline{S}(f, \tau^{(n)}) \to \int_I f(x)\,\mathrm{d}x \tag{227}$$

$$S(f, \tau^{(n)}, \xi^{(n)}) \to \int_I f(x)\,\mathrm{d}x \tag{228}$$

Beweis. 1 Beh: Seien $\tau, \sigma \in Z(I)$. $\tau = \{x_0 < \cdots < x_N\}, \sigma = \{y_0 < \cdots < y_M\}, I_k := (x_{k-1}, x_k), J_k = (x_{k-1}, y_k)$ mit

$$\Delta\sigma \equiv \max_{j=1,\ldots,M} |J_i| \leqslant \min_{j=1,\ldots,N} |I_k|$$

Dann

$$\overline{S}(f, \sigma) - \underline{S}(f, \sigma) \leqslant 3\overline{S}(f, \tau) - \underline{S}(f, \tau)$$

Wir setzen $\epsilon_{jk} := 1$ falls $J_j \cap I_K \neq \varnothing$ und $\epsilon_{jk} = 0$ sonst. Aus Δ-Ungleichung

$$\operatorname*{osc}_{J_i} f \leqslant \sum_{k=1}^{N} \epsilon_{jk} \operatorname*{osc}_{I_k} f \tag{229}$$

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f, \sigma) - \underline{S}(f, \sigma) &= \sum_{j=1}^{M} \left(\operatorname*{osc}_{J_j} f\right) |J_j| && (230)\\
&\overset{(229)}{\leqslant} \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} \epsilon_{jk} \left(\operatorname*{osc}_{I_k} f \right| J_j| && (231)\\
&= \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{M} \epsilon_{jk} |J_j| \right) \left(\operatorname*{osc}_{I_k} f\right) && (232)\\
&\leqslant 3 \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{osc}_{I_k} f |I_k| && (233)\\
&= 3(\overline{S}(f, \tau) - \underline{S}(f, \tau)) && (234)
\end{aligned}$$

2 Sei $\epsilon > 0, f \in R(I) \implies \exists \tau \in Z(I)$, sodass

$$\overline{S}(f, \tau) - \underline{S}(f, \tau) < \frac{\epsilon}{3} \tag{235}$$

wobei $\tau = \{x_0 < \cdots < x_N\}$, $I_k = (x_{k-1}, x_k)$, $\delta := \min_k |I_k|$.

Da $\Delta(\tau^{(n)}) \to 0$ gibt es $n^* \in \mathbb{N}$ mit $\Delta(\tau^{(n)}) < \delta \forall n \geqslant n^*$. Aus 1 folgt

$$\overline{S}(f, \tau^{(n)}) - \underline{S}(f, \tau^{(n)}) \overset{(235)}{<} \epsilon \quad \forall n \geqslant n^*$$

d.h. $\overline{S}(f, \tau^{(n)}) \to \int_I f \,\mathrm{d}x$ und $\underline{S}(f, t^{(n)}) \to \int_I f$.

Insbesondere $S(f, \tau, \xi^{(n)}) \to \int_I f$.

□

8.2 Integrierbarkeit stet. Fkt, gleichm. Konvergenz

Satz 8.12. *$a, b \in \mathbb{R}, a < b, I = [a, b]$. Dann ist jede stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ R-integbar.*

Beweis. f stetig, I kompakt $\implies$ f ist gleichmäßig stetig. $\implies$ zu $\epsilon > 0 \exists \delta > 0$ sodass

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b - a} \quad \forall x, y \in I,\ |x - y| < \delta \tag{236}$$

Wäre $\tau \in Z(I)$ mit $\Delta t < \delta$. Dann

$$\overline{S}(f, \tau) - \underline{S}(f, \tau) = \sum_{k=1}^{N} \left(\operatorname*{osc}_{I_k} f \right) |I_k|$$

wobei $\tau = \{x_0 < \cdots < x_N\}, I_k = (x_{k-1}, x_k) \overset{(236)}{\implies} \overline{S}(f, \tau) - \underline{S}(f, \tau) < \epsilon$. Aus Lemma 8.9 $\implies f \in R(I)$. □

Beispiel 8.13. Sei $I = [-1,1]$, $f_n \in R(I)$

$$f_n(x) = \begin{cases} n & |x| \in \left(0, \frac{1}{2n}\right) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt $\int f_n \,\mathrm{d}x = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}*$, aber $f_n(x) \to \quad \forall x \in I$, d.h. $f_n(x) \to f(x) = 0$, aber $1 = \int f_n \,\mathrm{d}x \not\to \int f = 0$.

Satz 8.14. *$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a,b]$. Sei $f_n \in R(I)$ eine Folge R-intbarer Funktionen mit $f_n \rightrightarrows f$ für ein $f\colon I \to \mathbb{R}$. Dann gilt $f \in R(I)$ und*

$$\int_I f \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}x$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Da $f_n \rightrightarrows f$ gibt es $n^* \in \mathbb{N}$ mit

$$\sup_x |f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{4(b-a)} \quad \forall n \geqslant n_* \tag{237}$$

Insbesondere

$$\sup_x |f(x)| < \sup_x |f_{n*}(x)| + \frac{\epsilon}{4(b-a)} \leqslant C < \infty$$

d.h. f ist beschränkt. Da $f_{n*} \in R(I) \quad \exists \tau = \{a = x_0 < \cdots < x_N = b\}$, $I_k = (x_{k-i}, x_k)$ mit

$$\overline{S}(f_{n*}, \tau) - \underline{S}(f_{n*}, \tau) < \frac{\epsilon}{2} \tag{238}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \overline{S}(f,\tau) - \underline{S}(f,\tau) &= \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{osc}_{I_k} f|I_k| & (239)\\ &\leqslant \sum_{k=1}^{N} 2 \sup_{x\in I_k} |f - f_{n*}||I_k| + \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{osc}_{I_k} f_{n*}|I_k| & (240)\\ &\leqslant 2\sup_x |f - f_{n*}|(b-a) + \left[\overline{S}(f_{n*},\tau) - \underline{S}(f_{n*},\tau)\right] & (241)\\ &< \frac{\epsilon}{2} + \epsilon 2 = \epsilon & (242) \end{aligned}$$

d.h. $f \in R(I)$. Mit einer ähnlichen Abschätzung folgt

$$\left|\int_I f \,\mathrm{d}x - \int_I f_n \,\mathrm{d}x\right| \leqslant |\overline{S}(f,\tau) - \underline{S}(f_{n*},\tau) < \epsilon$$

□

Lemma 8.15. *Sei $a < b < c$. Dann gilt $f \in R([a,c])$ wenn $f \in R([a,b])$ und $f \in R([b,c])$.*

Beweis. Für jede Zerlegung τ_1 von $[a,b]$ und τ_2 von $[b,c]$ ist $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ eine Zerlegung von $[a,c]$.
Umgekehrt, falls τ eine Zerlegung von $[a,c]$ ist, dann ist $\tau_1 = (\tau \cap [a,b]) \cup \{b\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$. Die Aussage folgt aus entsprechenden Abschätzungen für Ober-/Untersummen. □

Lemma 8.16. *$a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und sei $f \in R([\alpha,\beta])$ für alle $\alpha < \beta$, $\alpha,\beta \in (a,b)$. Dann gilt $f \in R([a,b])$ und*

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to 0} \int_{a+\delta}^{b-\delta} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Wir setzen $I_\delta := [a+\delta, b-\delta]$ mit

$$\delta := \min\left\{\frac{\epsilon}{4\operatorname{osc}_I f}, \frac{1}{f}|I|\right\}$$

Dann gilt $f \in R(I_\delta)$ und es gibt eine Zerlegung τ_δ von I_δ mit

$$\overline{S}(f|_{I_\delta}, \tau) - \underline{S}(f|_{I_\delta}, \tau_\delta) < \frac{\epsilon}{2}$$

Sei $\tau := \tau_\delta \cup \{a,b\}$. Dann gilt

$$\overline{S}(f,\tau) - \underline{S}(f,\tau) < \frac{\epsilon}{2} + 2\delta \operatorname{osc} f \leqslant \epsilon$$

Damit folgt $f \in R(I)$. Die Identität folgt mit einer ähnlichen Abschätzung. □

Satz 8.17. *Sei $a,b \in \mathbb{R}, a < b, I = [a,b]$ und sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ beschränkt mit endlich vielen Unstetigkeitsstellen. Dann gilt $f \in R(I)$.*

Beweis. Folgt aus der Integrierbarkeit stetiger Funktionen, Lemma , Lemma . □

Lemma 8.18. *Sei $I = [a,b]$, $a < b$, $a,b \in \mathbb{R}$. Sei $f \in R(I)$ und sei $F\colon I \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = F(X)\ \forall x \in I\backslash E$ für eine endliche Menge E. Dann gilt $f \in R(I)$ und*

$$\int_I f\,\mathrm{d}x = \int_I F\,\mathrm{d}x$$

Beweis. Folgt aus Lemma 8.2 und Lemma 8.2. □

Satz 8.19 (MWS der Integralrechnung)**.** *Sei $a, b \in \mathbb{R},\ a < b,\ I = [a, b]$. Sei $f \in C^0(I)$. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi) \cdot (b - a) \tag{243}$$

Beweis. Sei $m = \min_I f,\ M = \max_I f$. Nach Lemma gilt

$$\nu := \frac{1}{b-a} \int_I f\,\mathrm{d}x \in [m, M] \tag{244}$$

Nach dem ZWS und da $f \in C^0(I)$ gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = \nu$. Damit folgt (243) aus (244). □

Satz 8.20. *Sei $f \in R(I)$, $g\colon J = f([a, b]) \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Dann gilt*

$$g \circ f \in R(I)$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

8.3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Definition 8.21. Für $a < b$ definieren wir

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Satz 8.22 (Hauptsätze der Diff.- und Int.rechnung)**.** *Sei $a, b \in \mathbb{R},\ a < b,\ I = [a, b]$.*

(i) Sei $f \in R(I)$ und sei

$$F(X) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Dann gilt: Falls f in $x_0 \in I$ stetig ist, dann ist F in x_0 diffbar und $F'(x_0) = f(x_0)$. Insbesondere, falls $f \in C^0(I)$, dann gilt $F \in C^1(I)$ und $F' = f'$.

(ii) Sei $F \in C^1([a,b])$ mit $F' = f$. Dann gilt

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \forall x \in I$$

Beweis. (i) Sei $x_0 \in I$ und sei f stetig in x_0. Sei $h \neq 0$ so gewählt, dass $x_0 + h \in I$. Dann gilt

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t\right) \tag{245}$$

$$= \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{246}$$

$$= \frac{1}{h}\alpha(h) \tag{247}$$

für ein $\alpha(h) \in \left[\min_{[x_0,x_0+h]} f, \max_{[x_0,x_0+h]} f\right]$ nach Lemma 8.2.

Da f stetig in x_0 ist, gilt $\alpha(h) \to f(x_0)$ für $h \to 0$. Daraus folgt

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \alpha(h) = f(x_0)$$

d.h. F ist diffbar in x_0 mit $F'(x_0) = f(x)$.

(ii) Wir definieren

$$G(x) = F(x) - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \tag{248}$$

Nach Voraussetzung und nach (i) gilt

$$G'(X) = f(x) - f(x) = 0 \quad \text{in } (a,b)$$

Nach Korollar 7.15 folgt, dass G konstant ist. Die Reche Seite von (248) ist stetig für $x \neq b$. Dies folgt aus den Voraussetzungen und aus Lemma 8.2. Daher ist G konstant in (a,b). Da G stetig ist, ist G konstant in $[a,b]$. Daraus folgt

$$G(x) = G(a) \overset{(248)}{=} F(a)$$

d.h.

$$F(a) = F(x) - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

□

Bemerkung 8.23. Die Aussagen von Satz sagen aus, dass

(i)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int^x f = f$$

8 DAS EINDIMENSIONALE RIEMANN-INTEGRAL

(ii)

$$\int^x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F = F + \mathrm{const}$$

Definition 8.24. Jede diffbare Funktion F mit Ableitung $F' = f$ heißt Stammfunktion von f. Notation: $F = \int f \, \mathrm{d}x$:set wrap

Lemma 8.25. *Es gilt:*

(i) $\int x^\alpha \, \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad \alpha \neq -1,\ x > 0$

(ii) $\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln x + C \quad x > 0$

(iii) $\int e^{\lambda x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} + C \quad x \in \mathbb{R}$

(iv) $\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C$

(v) $\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C$

(vi) $\int \cosh x \, \mathrm{d}x = \sinh x + C$

(vii) $\int \sinh x \, \mathrm{d}x = \cosh x + C$

(viii) $\int \frac{1}{x^2+1} \, \mathrm{d}x = \arctan x + C$

(ix) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = \arcsin x + C \quad x \in (-1, 1)$

Definition 8.26. (i) Die Fkt. $\arcsin\colon [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ist definiert als die Umkehrfunktion von $\sin\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$.

(ii) Die Fkt. $\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi]$ ist die Umkehrfkt von $\cos\colon [0,\pi] \to [-1,1]$.

(iii) Die Fkt. $\arctan\colon \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ist die Umkehrfunktion von $\tan\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$.

Satz 8.27. *Sei $g \in C^1([a,b])$, $f \in C^0(g([a,b]))$. Dann gilt*

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y) \, \mathrm{d}y = \int_a^b f(g(x)) g'(x) \, \mathrm{d}x$$

Beweis. Sei F eine Stammfunktion von f (existiert nach Hauptsatz (i)). Nach der Kettenregel und mit $\Phi := F \circ g$ gilt $\Phi' = (F' \circ g) g' = (f \circ g) g'$. Anwendung des HS (ii) ergibt

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b \Phi'(x) \, \mathrm{d}x = \Phi(b) - \Phi(a) = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} F'(y) \, \mathrm{d}y = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) \, \mathrm{d}y$$

Die Substitutionsregel lässt sich am besten mit der Leibnizschen Notation merken: $y = Y(x)$ gilt $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = Y'(x)$, „$\mathrm{d}y = Y'(x)\,\mathrm{d}x$". Mit der Notation $\tilde{f}(x) = f(Y(x))$ lässt sich der Satz in der Form

$$\int_{y=Y(a)}^{y=Y(b)} f(y)\,\mathrm{d}x = \int_{x=a}^{x=b} \tilde{f}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

schreiben. □

Beispiel 8.28. Die Fläche der Kreisscheibe mit Radius r ist gegeben durch

$$|B_r| = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \pi r^2$$

I.d.T., $f\colon [-r, r] \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $g(u) := r\sin u$, $g\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-r, r]$. Dann:

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} = \int_{g(-\frac{\pi}{2})}^{g(\frac{\pi}{2})} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} f(g(u))g'(u)\,\mathrm{d}u \tag{249}$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos u\sqrt{r^2 - r^2\sin^2 u}\,\mathrm{d}u \tag{250}$$

$$= r^2\int \cos u\sqrt{1 - \sin^2 u}\,\mathrm{d}u \tag{251}$$

$$= r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 u + \sin^2 u)\,\mathrm{d}u \tag{252}$$

$$= \frac{1}{2}\pi r^3 \tag{253}$$

$\implies |B_r| = \pi r^2$.

Satz 8.29. *Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f, g \in C^1([a, b])$. Dann gilt*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = -\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x + [f(x)g(x)]_a^b$$

mit der Notation $[\Phi(x)]_a^b := \Phi(b) - \Phi(a)$ für Fkt. $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Beweis. Aus dem Hauptsatz und der Produktregel folgt

$$[fg]_a^b = \int_a^b (fg)'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

□

Beispiel 8.30.

$$\int_0^1 xe^x = -\int_0^1 e^x + [xe^x]_0^1 \tag{254}$$
$$= -[e^x]_0^1 + [xe^x]_0^1 = -e + 1 + e - 0 \tag{255}$$
$$= 1 \tag{256}$$

8.4 Uneigentliche Integrale

Lemma 8.31. *Sei $a < b,\ a, b \in \mathbb{R},\ f \in R([a,b])$. Dann gilt*

$$\lim_{z \to b} \int_a^z f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Beweis. Sei $M = \sup_{[a,b]} f < \infty$. Dann gilt

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^z f(x)\,\mathrm{d}x \right| = \left| \int_z^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_z^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \tag{257}$$
$$\leqslant M \int_z^b \mathrm{d}x = M(b - z) \to 0 \tag{258}$$

für $z \to b$. □

Definition 8.32. Sei $a < b, a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Es gelte $f \in R([c,d])$ für alle $c < d, c, d \in (a, b)$.

(i) Sei $q \in (a, b)$. Falls die Grenzwerte

$$\lim_{c \to a} \int_c^q f(x)\,\mathrm{d}x,\ \lim_{d \to b} \int_q^d f(x)\,\mathrm{d}x$$

existieren, dann heißt f auf dem Intervall $[a, b]$ **uneigentlich integrierbar** (uneigentlich konvergent). Wir setzen

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c \to a} \int_c^q f(x)\,\mathrm{d}x \tag{259}$$

(ii) Das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ heißt **absolut konvergent**, falls das uneigentliche Integral $\int_a^b |f|\,\mathrm{d}x$ konvergiert. Notation: $\int_a^b |f| < \infty$.

Beachte, dass die linke Seite nicht von (259) nicht von q abhängt.

Bemerkung 8.33. Aus der Δ-Ungleichung

$$\left|\int_A^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$$

folgt, dass jedes absolut konvergente Integral auch uneigentlich konvergiert.

Beispiel 8.34. (i) Das Integral $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ konvergiert uneigentlich genau dann, wenn $\alpha < 1$.

I.d.T., für $\epsilon \in (0,1)$ gilt

$$\int_\epsilon^1 \frac{1}{x^\alpha} = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_\epsilon^1 = \frac{1}{1-\alpha} + \frac{\epsilon^{1-\alpha}}{\alpha-1} \to \frac{1}{1-\alpha}$$

für $\epsilon \to 0$ falls $\alpha \in (0,1)$.

(ii) Das Integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ konvergiert genau dann uneigentlich, falls $\alpha \in (1,\infty)$.

I.d.T., für $R \in (1,\infty)$ gilt

$$\int_1^R \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^R = \frac{R^{1-\alpha}}{1-\alpha} + C_\alpha \to C_\alpha$$

für $R \to \infty$ falls $\alpha \in (1,\infty)$. Die Rückrichtung der Aussage beweist man analog.

Lemma 8.35. *Sei $a,b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Seien $f,g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. Falls $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ absolut konvergent und falls $|f| \leqslant g$, dann konvergiert $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ absolut.*

Beweis. ÜA. Benutze Dreiecksungleichung. Analoger Beweis zum entsprechenden Resultat für Summen. □

Satz 8.36. *Sei $f\colon (1,\infty) \to [0,\infty)$ monoton fallend. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ genau dann, wenn $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert.*

Beweis. „$\Rightarrow$" Sei $\sum_1^{\infty} f(n) < \infty$. Da $f \searrow$ folgt $f(x) \leqslant f(k)$ $\forall x \in [k, k+1]$. Daher

$$\int_1^N f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{N-1} \int_K^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{N-1} f(k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty$$

„$\Leftarrow$" Sei $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$. Da $f \searrow$ folgt

$$f(k) \leqslant f(x) \ \forall x \in [k-1, k]$$

Daher

$$\sum_{k=2}^{N} f(k) = \sum_{k=2}^{N} \int_{k-1}^{k} f(k)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=2}^{N} \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{260}$$

$$= \int_1^N f(x)\,\mathrm{d}x < \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < \infty \tag{261}$$

□

8.5 Taylorpolynome, Taylorreihen, gleidweise Differentiation von Reihen

Definition 8.37 (Taylorpolynom, Taylorreihe)**.** Sei $n \in \mathbb{N}, I \subset \mathbb{R}, \overset{\circ}{I} \neq \emptyset$. Sei $f \in C^n(I), x_0 \in I$. Dann ist das Taylorpolynom n-ter Ordnung von f in x_0 definiert durch

$$T_{f,x_0}^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

Wenn $f \in C^\infty(I)$, dann ist die Taylorreihe von f in x_0 die Reihe

$$T_{f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

Bemerkung:

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} T_{f,x_0}^{(n)} = f^{(k)}(x_0), \quad k = 1, \ldots, n$$

Satz 8.38 (Verallgemeinterter MWS der Integralrechnung)**.** *Seien $a < b$, $f \in C^0([a,b])$, $g \in R([a,b])$ und sei $g \geqslant 0$. Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Beweis. Sei $m := \min_{[a,b]} f,\ M := \max_{[a,b]} f,\ mg \leqslant fg \leqslant Mg$.

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = Q\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x, \quad Q \in [m, M]$$

Für $\int g = 0$ ist Q beliebig. Für $\int g > 0$ ist

$$Q := \frac{\int_a^b fg\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g\,\mathrm{d}x}$$

Damit folgt aus dem ZWS die Behauptung. □

Satz 8.39 (Taylor-Restgliedabschätzung)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$, $I \in \mathbb{R}$, $\overset{\circ}{I} \neq \emptyset$. Sei $f \in C^{n+1}(I)$, $x_0 \in I$ und sei*

$$R_{f,x_0}^{(n)}(x) := f(x) - T_{f,x_0}^{(m)}(x)$$

Dann gilt $\forall x \in I$:

$$R^{(n)}_{f,x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{n!}(x-t)^n f^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \textit{(Integraldarstellung)}$$

weiterhin gibt es $\forall x \in I\backslash\{x_0\}$ ein ξ zwischen x_0 und x, sodass

$$R^{(n)}_{f,x_0}(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \qquad \textit{(Lagrange-Darstellung)}$$

Beweis. Sei o.B.d.A. $x \geqslant x_0$.

Integraldarstellung

$$\int_{x_0}^{x} \underbrace{\frac{(x-t)^n}{n!}}_{f} \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{g}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\right]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t \tag{262}$$

$$= \int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-x_0)^n}{k!} f^{(k)}(x_0) \tag{263}$$

$$= f(x) - T^{(n)}_{f,x_0}(x) = R^{(n)}_{f,x_0}(x) \tag{264}$$

Lagrange-Darstellung $\frac{1}{n!}(x-t)^n \geqslant 0 \quad \forall t \in (x_0, x)$.

$$R^{(n)}_{t,x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{n!}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \tag{265}$$

$$= \left(\int_{x_0}^{x} \frac{1}{n!}(x-t)^n\,\mathrm{d}t\right) f^{(n+1)}(\xi) \tag{266}$$

$$= \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(\xi) \tag{267}$$

$$= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \tag{268}$$

□

Satz 8.40. *Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \textit{falls } x > 0 \\ 0, & \textit{falls } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Dann gilt $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$. Weiterhin gilt $f^{(k)}(0) = 0\ \forall k \in \mathbb{N}$.

Beweis. 1 Sei $\phi \in C^0(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ mit $\phi'(x) = \lim_{x\searrow 0} \phi'(x) =: A$ existent[3]. Dann gilt $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ und $\phi'(0) = A$.

MWS $\implies \xi \in \mathbb{R} : |\xi| \in (0, |x|)$.

$g(x) = \phi'(\xi) = \left|\frac{f(x)-0}{x}\right| \overset{x\to 0}{\to} A$.

$\implies \left|\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x} - A\right| = \phi'(\xi) \to A$.

2 zu zeigen: f in $x = 0$ beliebig oft diffbar.

$\lim_{x\searrow 0} f(x) = 0$, $f(0) = 0 \implies f$ stetig in $x = 0$.

$f'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}, x > 0 \overset{\text{L. 6.8}}{\implies} \lim_{x\searrow 0} f'(x) = \lim_{x\searrow 0} \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = 0, \lim_{x\nearrow 0} f'(0) = 0.$

Mit Schritt 1 folgt $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $f'(0) = 0$.

Induktiv: $f^{(k)} = p(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}$, $p(\frac{1}{x})$ Polynom in $\frac{1}{x}$.

$\implies \lim_{x\searrow 0} f^{(k)}(x) = \lim_{x\searrow 0} p(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}} = 0, \lim_{x\nearrow 0} f^{(k)}(x) = 0 \overset{\text{Schritt 1}}{\implies} f \in C^k(\mathbb{R}), f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

□

Beispiel 8.41. Sei f aus Satz 8.40 und sei $g(x) := f(x)+f(-x)$. Dann gilt $g \in C^\infty(\mathbb{R}), g^{(k)}(0) = 0\ \forall k \geqslant 0$. Aber $g > 0\ \forall x \neq 0$. Insbesondere existiert $T_{f,0}$ aber $T_{f,0} \neq f$.

Definition 8.42. Eine Funktion $f \in C^\infty(I)$ heißt **(reell) analytisch**, falls für jeden Punkt $x_0 \in I$ eine Umgebung $U(x_0) \subset I$ existert, sodass $f = T_{f,x_0}$ um $U(x_0)$. Die Menge der reell analytischen Funktionen bezeichnen wir mit $H(R)$.

Bemerkung 8.43. (i) Satz 7.26 $\implies H(I) \subset C^\infty(I)$ für jedes $I \subset \mathbb{R}$ mit $\mathring{I} \neq \emptyset$.

Weiterhin sei $f \in C^\infty(I), f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n(x-x_0)^n\ \forall x \in I$.

Mit Satz 7.26 folgt $f^{(k)}(x_0) = \left(\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \sum_{n=0}^\infty a_n(x-x_0)^n\right)|_{x-x_0} = k'a_k$

$\implies a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \implies T_{f,x_0}(x)$ ist die einzige mögliche Potenzreihe mit x_0, die f darstellt.

[3]Ich glaube immernoch, dass hier ein böser Schreibfehler drinsteckt.

(ii) Satz 7.29 $\Longrightarrow$ nicht jede glatte Fkt. ist rell analytisch.

$$C^0(I) \supsetneq C^1(I) \supsetneq C^2(I) \supsetneq \cdots \supsetneq C^\infty(I) \supsetneq H(I)$$